译者的话

本书译自《问题与思考》(«Задачи и размышления» 1974年)第二部分"又一百个问题"(Ещё сто задач). 原书是把著名的波兰数学家古伏·史坦因豪斯(1887～1972年)所写的一些通俗读物合编而成的.

作者以前著有《一百个数学问题》(中译本也由上海教育出版社出版). 仿照这本书的体例,俄文编译者在作者逝世后,从分散于波兰《数学》杂志上的问题中编了这又一百个问题. 对这些问题,基本上引用了这本杂志的读者所提出的解答.

这些问题的形式是简单的,涉及的知识面是广泛的,而且是相当有启发性的——从初等的形式出发,引导读者灵活运用中学数学知识,以及进入数学王国的某些领域. 仔细地研读这些问题,对提高学生的数学水平无疑是有益的. 虽然除两个问题外都附有解答,但译者希望在读者中会出现新的更好的解答,并且能解决那两个遗留问题(第11题、第97题).

还要说明一点,这不是一本通常的习题集. 可能有些读者对某些问题暂时还不会有彻底的了解,这正是史坦因豪斯的三本小册子(《数学万花镜》《一百个数学问题》及本书)的共同特点:随着读者的知识水平的提高,每隔一定时间重读的话,会得到一层深一层的理解.

对原文除改正了一些刊误或错误外,只在个别地方作了删节,其它都照译. 此外,为帮助部分读者阅读,加了一些注释. 限于译者的水平,无论是译文或注释都会有不当之处,望批评指正.

庄 亚 栋 1979年1月15日

104 39/12

VISIT…

目　录

一、点阵，不等式和序列（第 1～14 题）…… 1
二、平面，多边形，圆（第 15～38 题）…… 3
三、空间，多面体，球（第 39～56 题）…… 9
四、实际问题和非实际问题（第 57～78 题）……12
五、萨拉杰克博士的新数学趣事（第 79～92 题）……19
六、运动问题（第 93～100 题）……24
七、低年级学生的问题……27
解答……28

一、点阵，不等式和序列

1. 圆上的整点 在直角坐标系内，x 表示点 (x, y) 的横坐标，y 表示纵坐标. 平面上坐标只取整数值的所有点 (x, y) 的集叫做整点阵(整数格，或简称为格). 整点阵的点通常叫整点.

证明：以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 为圆心的圆至多通过一个整点，就是或者通过一个整点，或者不通过任何整点，但不可能通过两个或两个以上的整点.

2. 圆内的整点 考虑落在圆 K 内(由圆 K "包围")的整点. 在圆 K 上的整点不算在 K 内.

证明：存在这样的圆，它的内部有一个整点，两个整点等等. 一般地，对任何 n(自然数或 0)，可以给出一个内部恰好有 n 个整点的圆.

3. 圆和整点阵 作内部分别有下列各个整点的最大的圆：(1) 0 个；(2) 1 个；(3) 2 个；(4) 3 个；(5) 4 个；(6) 5 个. 计算各种情况的圆的直径.

4. 在点阵里移动的圆 存在这样的圆，随着它在点阵内位置的不同，在其内部可以有 1, 2, 3, 4 个整点. 换句话说，存在直径固定的圆，对它来说，这四种情形(而且只有这四种)都可以出现. 这样的圆的直径应该满足什么条件？

内部含有 4 个整点(在某个位置)的最大的圆，可以移动到使它内部出现 9、8 或 7 个整点的位置. 能不能把它移动到使它内部出现 5、6 或 10 个整点的位置？

5. 四个数 用几何方法证明：满足条件

$$0<a<b<c<d,\ a+d=b+c,\ a^2+d^2=b^2+c^2$$

的四个数 a, b, c, d 不存在.

6. 两个集 把区间[0, 1]分成不相交的两个集 A 和 B（例如，把坐标 x 为有理数的所有点作为集 A，把坐标 x 为无理数的所有点作为集 B）.

在[0, 1]上定义一个连续函数 $f(x)$，使对属于集 A 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 B，而对属于集 B 的 x，函数值 $f(x)$ 属于集 A.

能作出这样的函数吗？

7. 近似估计 说明数

$$x=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$$

满足哪一个不等式：是 $x>3$，还是 $x<3$？

8. 不等式 证明：对任意整数 p, q $(q\neq 0)$，下面的不等式成立

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}.$$

9. 连分数 序列 $\{a_n\}$ 是自然数的某个排列（每个自然数在 $\{a_n\}$ 里出现且仅出现一次）. 用 $\xi(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ 表示连分数

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}.$$

证明：ξ 不可能取闭区间 $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ 中的任何一个值. 在开区间(0, 1)里，存在着 ξ 的其他“不可达到的”值吗？

10. 数列 求正数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$，它满足 $a_0=1$ 及递推关系式

$$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}, \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

证明：这样的数列只有一个.

11. 正方形 能不能作一个正方形，它的边长是整数，并且在它所在的平面上能指出一个点，使该点到正方形四个顶点的距离都可以用整数表示.

注 我不知道这个十分困难的问题的解答.

12. 有趣的根式 证明：对任何自然数 n，式

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$$

的值小于 2.

13. 特殊性质的三角形 边长为整数 a、b、c，底边上的高等于底边的三角形存在吗？

14. 丢番图[①]方程 求四个自然数 a, b, c, d，满足方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

及条件 $a<b<c<d$.

a, b, c, d 能是素数吗？

二、平面，多边形，圆

15. 沿平面滚动的四面体 设想有一个四面体，它的各个面是边长为 k、l、m 的全等三角形. 我们把它绕着底面的棱沿平面滚动. 作为旋转轴的棱，我们每一次都独立地选择（即相邻两次转动绕不同的底棱进行——译者）.

沿平面随便滚动多久的四面体，总能沿着与原来的道路没有一个地方重合的道路，返回出发位置吗？（"不重合"的道

① 约公元三世纪时的希腊数学家. 丢番图方程即不定方程. ——译者

路是指，如果把这个四面体的面随便涂上什么颜色，并且认为滚动时，每个面都在平面上留下了痕迹，那末只有最后一个痕迹与第一个痕迹重合，而其它所有痕迹无论何处都不重迭.)

16. 大圆和小圆 半径为 3 cm 的小圆与半径为 6 cm 的圆外切. 离小圆的圆心 1 cm 处"固定"一个点. 当小圆沿大圆无滑动地滚动时，这个点画出了一条闭曲线.

(1) 证明：内接于这条曲线的等边三角形 T 可以这样地移动，使它的三个顶点同时描出整条曲线；

(2) 计算三角形 T 的边长；

(3) 当 T 的顶点如条件(1)所说那样转动时，求 T 的中心的轨迹.

17. 直尺和两个圆 考察平面上两个不同半径的同心圆. 很明显，它们可以用长度为半径之差的直尺(直线段)的端点同时画出. 同样显然的是，选择适当的线段，我们能在平面的任意位置，(用线段的端点)同时作出两个相同的圆.

为了使直尺的端点能同时画出两个圆，圆的半径、圆心距和直尺的长度应该满足什么样的充分必要条件？

18. 内接平行四边形 设 G 是凸区域①，它的面积也用字母 G 表示. 我们所说的凸性是指严格意义下的，即假定区域 G 的边界既不包括任何直线段，也没有尖点. 换句话说，在 G 的边界上每个点处，都有一条而且只有一条切线，并且每条切线与 G 的边界有且仅有一个公共点. 设 $PQRS$ 是区域 G 的外切四边形中面积最小的一个，A, B, C, D 分别是它的四条边 PQ, QR, RS, SP 与区域 G 的边界的切点.

证明：$ABCD$ 是面积大于 $G/2$ 的平行四边形.

---

① 如果连接区域 G 中任意两点的线段在 G 内，那末称 G 是凸区域. 凸区域的边界叫凸曲线. ——译者

19. 外切平行四边形 设G是上题所说的凸区域,$ABCD$是G的所有内接四边形中面积最大的一个. 过A, B, C, D作G的切线,得到四边形$PQRS$.

证明: $PQRS$是G的面积小于$2G$的外切平行四边形.

20. 空间五边形 在三维空间里,能作一个各边相等,各个角是直角的闭五边形吗?

21. 带直角的等边"奇数边形" 在三维空间里,作一个有奇数条边的闭多边形,它的各边相等,各个角是直角,可能吗?

22. 正方形和曲线 作一条光滑的凸闭曲线,它不是圆,但随便从该曲线上哪一点出发,作它的外切正方形时,这些正方形的面积不变. 换句话说,这条曲线的外切正方形可以不改变大小地绕着它转动,并且正方形的各条边仍然与曲线相切(圆是有这种性质的).

23. 重心 在$\triangle ABC$的各顶点处放置了质点:放在A点的质点,它的质量等于BC边的长度,放在B点的质点,它的质量等于AC边的长度,放在C点的质点,它的质量等于AB边的长度.

证明: 这三个质点形成的系统的重心与$\triangle ABC$的内切圆心重合.

24. 外接圆 通过矩形四个顶点的圆,是包含这个矩形的所有圆中面积最小的一个. 内切于矩形的最大的圆有无数个. 我们把包含平面图形F的圆里最小的一个,叫F的外接圆,把整个地含于F内的圆里最大的一个,叫F的内切圆.

证明: 不管图形F的形状如何,只要它有界①,总只有

① 若平面图形F能整个地含于某一个圆内,则称F是有界图形,否则叫无界图形. ——译者

一个外接圆.

25. 锐角三角形 能不能用垂直于锐角三角形三边，且交于三角形内某个点的线段，把三角形分成三个相等的部分？

26. 圆内的点 平面上有十个点在一个圆内，移动各个点，使任两点之间的距离减小.

能不能作一个半径较小的圆，使移动后的十个点都在圆内？

在平面上某个圆内任取 n 个点(n 是任意自然数)，把这些点移动，使任意两点之间的距离变小.

是否总能作一个半径较小的圆，使得在新位置的所有的点都在圆内？

27. 铅丝三角形 用一根均匀的铅丝做一个三角形 PQR. 以它各边的中点为顶点得到一个新三角形(边长减小一半)，然后用直线段连接三角形 PQR 的重心与小三角形的顶点.

证明：这些线段平分小三角形的内角.

28. n 边形 为使以数 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 为边长的 n 边形(各边及其长度的记号相同)存在，b_k 应满足什么样的充要条件？

29. 再谈 n 边形 设数列 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 满足上题所说的充要条件，那末保持边的次序不变，我们可以在以 b_k 为边的所有 n 边形中，作一个有最大面积的 n 边形.

最大面积与数 b_k 的次序有关吗？换句话说，如果保持各边仍是 b_k 不变，但改变它们构成 n 边形时的次序，相应的最大 n 边形的面积改变吗？

30. 内接 n 边形 证明：如果存在边长为 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 的 n 边形，那末也存在边长为 b_k、次序也相同的内

接于某个圆的 n 边形.

31. 平面的剖分 一个圆把平面分成两部分，用两个圆可以把平面分成四部分. 再作一个圆——第三个圆，我们把平面分成了八部分.

能不能用四个圆(分布在同一平面上)把平面分成16部分?

32. 再谈平面的剖分 证明：对任意自然数 n，在平面上存在 n 个圆，把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分.

用 n 个相同半径的圆总能把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分吗?

33. 六边形的面积 证明：边长小于1的六边形的面积小于2.6.

34. 卵形里的点 已知平面上有 n 个点在卵形①内(在内部而不在它的边界上). 可以用线段把卵形这样地分隔成若干部分，使得：第一，在每一部分内只有这 n 个已知点中的一个；第二，任何一部分的"主人"到"自己的"点，要比到"别人的"来得近；第三，多边形"篱笆"只包含边界与卵形边界重合的曲线部分(即篱笆如果有曲线部分的话，只能是卵形边界的一部分. ——译者).

在卵形内部，由有 L 节的折线网形成篱笆. 当已知 n 时，L 的最大值是多少?

35. 圆上的23个点 圆 K 的周长是50cm，在 K 上任意地分布着23个点，这些点形成集 Z(这样，集 Z 有23个不同的元素).

以 A 和 B 为端点，长7cm的弧 L，沿圆 K 顺时针方向运动. 需要证明下述两个结论.

① 所谓卵形，是指有界闭凸区域. 例如，圆形，椭圆形都是卵形. ——译者

结论 I. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的三个点属于它的位置.

结论 II. 在某一时刻，弧 L 转到恰好有 Z 的四个点属于它的位置.

注 端点 A 算作属于弧 L，而端点 B 不属. 根据惯例，所谓"弧 L 恰好包含集 Z 的 n 个点"，是指弧 L 包含集 Z 的不与端点 B 重合的 n 个点.

36. 两个十字形 互相垂直平分的两条线段形成的图形，叫做十字形. 线段本身叫十字形的横杠，交点叫十字形的中心. 中心不同，但横杠两两平行的十字形叫做平行的十字形.

如果多边形的内角都小于 180°，则叫做凸多边形（因为任何一个内角都不可能等于 180°）.

需要证明，不可能作出这样的凸多边形，使得连接它的某些顶点能成为两个平行的十字形（多边形的顶点数可以任意大）.

37. 圆心 某圆内部含有基本正方形边长为 1 的正方形网格的 10 个格点，它的面积是 10 平方单位，试计算它的圆心坐标 x_0，y_0. 圆心坐标应该满足不等式 $0 \leqslant x_0 \leqslant y_0 \leqslant 1$.

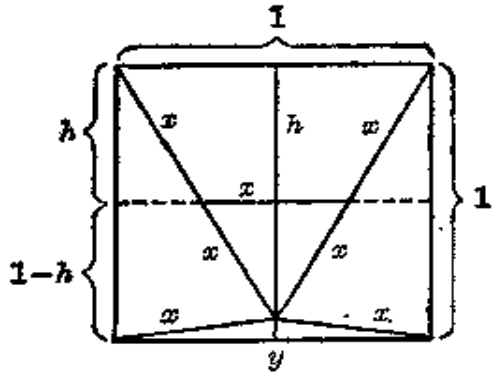


图 1

38. 正方形内的七个点 需要在单位正方形内放置七个点，四个在顶点，三个在内部（图 1）. 两两连接这七个点，得到 21 条线段. 图 1 上只画了七条最短的线段（每条这样的线段和它的长度都

用 x 表示). 字母 h 的含义从图上是清楚的，y 表示底边与正方形下底重合、两侧是 x 的三角形的高.

计算线段 x、h 和 y 的长度.

三、空间，多面体，球

39. 四面体 有六根不同长度的小棒. 无论按什么次序，拿这些小棒总能搭成四面体的骨架. 能得到多少种不同的四面体?

40. "被戳穿的"立方体 用 27 个相同的小立方体组成一个大立方体. 作一条直线，它"戳穿"的小立方体的个数最多，并且求出这个数字. 所作的直线不应该与这些立方体的棱相交.

41. 用球填满空间 我们已经知道，空间里同样大小的球形成的最紧密结构①. 在单位球形成的这样的结构中，球与球之间有大、小两类空隙. 这些空隙可以用不同半径的两种小球充填，大的空隙里放大的，小的空隙里放小的. 两种半径应选择得使这些球紧紧地嵌进空隙，不能活动.

每一个较小半径的球与单位球的切点有多少个? 较大半径的球呢? 它们的半径各是多少?

42. 导出多面体 任取一个多面体，用下述方法作另一个多面体，它叫做原多面体的导出多面体:

过球 K 的球心作平行于已知多面体的各界面的平面. 这些平面与球 K 的表面交成大圆弧，它们形成球面多边形. 把

① 见史坦因豪斯著《数学万花镜》第 82 题，裘光明译，中国青年出版社，1958 年版. ——译者

这些球面多边形的每一条边用弦代替，我们得到了内接于球 K 的导出多面体的棱．如果原多面体有两个平行界面，那末它们在球 K 上只对应一个大圆．

作下列多面体的导出多面体，并确定它们的形状．

(1) 正四面体；

(2) 立方体；

(3) 正八面体；

(4) 正十二面体；

(5) 正二十面体．

43．曲面上点之间的距离 在闭凸(不凹)曲面上的任两点之间，可作一条连接这两个点的最短的弧．(在连接两个已知点的弧中，可能有若干条最短的．例如，在球面上，直径的两个端点之间可以用无数条大圆弧连接．)

曲面上任两点 P、Q 之间的距离，定义为连接 P、Q 的最短弧的长度．尤其是，我们能够度量曲面上已知点 P 与任一点 X 之间的距离．

在曲面的所有点中找一个离已知点 P 最远的点 S(也许不是唯一的)．能否假设点 P 和 S 至少总能以两条最短弧连接？

求证：对于某些四面体，这样的假设已经不正确．

44．闭曲面 用平面截某个闭曲面得到的截口都是圆(截口只有一个点时，把它看作半径为 0 的圆)．

证明：这个闭曲面是球．

45．凸曲面 能不能作一个不是球的闭凸曲面，使通过适当选择的某条直线的平面，与这个曲面的交线都是圆？

46．立方体里的点 所谓数 u、v、w 算术无关，是指除 $(0, 0, 0)$ 以外，对随便什么数组 (p, q, r)，关系式

$$pu+qv+rw=0$$

不成立.

设想有一个立方体，它的棱平行于直角坐标系的轴，有一个质点 M 在它里面不停地运动(没有外力作用于 M). 在初始时刻 $t=0$，点 M 的速度不等于 0，随后按照"入射角等于反射角"的规律，在立方体的壁之间不断弹射. M 的速度的三个分量 u、v、w 是算术无关的.

证明：动点 M 无论何时都不会返回出发位置.

47. 多面体 在正多面体中，哪些有下述性质：在它的界面上能适当地写上自然数(每个面上写一个数，除此之外，对这些数没有限制)，使得相邻界面上的数互素，不相邻界面上的数有不等于 1 的公约数.

48. 直线和三个球 三个球有公共点 P，但通过 P 的任何直线都不是这三个球在 P 处的公切线.

证明：这三个球还有一个公共点.

49. 球面上的四个点 用直线段两两连接球面上的四个点，得到一个四面体. 证明：当任意两个点之间的距离相等时，这个四面体的体积最大. (即正四面体时体积最大)

50. 四条直线和第五条直线 在三维空间内，作四条既不平行又不相交的直线，使任何第五条直线不会与这四条直线都相交.

51. 立方体的剖分 把立方体分成六个四面体，其中三个相等，另三个与这三个的镜面反射相等.

52. 四面体和立方体 对四面体的铁丝模型(用六根铁丝作棱的骨架)，可以用纱线连接不同棱上的各对点而填满为实体.

考虑另一个立体的铁丝模型，即由 12 条棱作成的立方体

的骨架. 能不能用上述方法把它填满为实体?

53. 分田 需要把一块正方形田三等分. 不难把它分成三块矩形,使分界线的总长度为该正方形边长的 5/3.

如果不把这块田分成矩形块, 能不能缩小分界线的长度?

54. 空间里的射线 从立方体一个顶点出发的三条棱,彼此构成 90° 角. 在三维空间里,也能找到四条射线,它们从同一个点出发,并且彼此构成等角. 试计算这个角的大小. 在三维空间里,能不能指出有这些性质的五条射线?

55. 正二十面体 从正二十面体的中心看它的一条棱的视角有多大?

56. 球的剖分 点 O 是正四面体的顶点,同时又是球 S 的球心. 这个球如此地小,使得从顶点 O 出发的四面体的三条棱都与它相交. 特别地,这个四面体把球分成两部分:大的部分在四面体外,小的部分在四面体内.

这两部分之间的比值是多少?

四、实际问题和非实际问题

57. 称量 需要把五个不同重量的物体, 按重量减少的次序排列. 只能用最简单的没有砝码的天平, 把要比较的物体放上去比较哪一个重.

为了用最佳方案解决问题,即要使称量次数最少,应该怎么做? 此时称多少次?

58. 烟草问题 甲、乙、丙三人生活在一起,他们公用价值 120 兹罗提(波兰货币——译者)的大包烟丝. 若丙不抽

烟，则这包烟丝够甲、乙两人用 30 天．若乙不抽，则甲、丙两人可用 15 天．若甲不抽，则乙、丙两人 12 天用完这包烟丝．若三个人一起抽，这包烟丝可以用多少天？每个人应付多少钱？

59．车间的宽度 车间里，两根枕木上放着 15m 长的铁轨，它与枕木的轴垂直，且有一端与墙接触．枕木的轴平行于与铁轨接触的墙，从这墙到最近的枕木距离 5m．推动铁轨（设枕木与地板及铁轨与枕木之间没有滑动）时，枕木也滚动，并且轴向不变．如果当铁轨的一端碰到车间对面的墙壁时，它的另一端恰好在一根枕木的轴线上，求车间的宽度．

60．弗劳兹拉夫游戏 游戏参加者随意挑选一个满足以下两个条件的问题：(1) 随便哪个参加者都不知道怎么精确地回答它；(2) 它是用数回答的．例如可以问："我们做游戏的这座房子有多少 cm 高？"每个参加者在一张纸上写出自己的回答，签上自己的名字．然后把纸集中起来，计算所有的数的算术平均值．答案最接近这个平均值的人得胜．两个事先串通的同伙可以大大增加得胜的机会，怎么串通法？为减少发生这种情形的危险，应该怎样改变弗劳兹拉夫游戏的上述取胜规则？

61．水盆和地球仪 在水平支架（桌面）上放着白铁皮的球缺形水盆，盆里放着一个小地球仪．通过地球仪和盆的切点的垂线，同时也是这个球缺和地球仪的对称轴．通过垂直于这根公共轴的水平线，可以把地球仪上每一个指定的点投影到水盆上．在这样的映射下，标志在地球仪上的各个地区以稍微扩大了的形状映到水盆上．

求证：当从地球仪投影到水盆上时，所有地区的面积增

大同样的倍数.

62. 网袋里的球 用长 10 cm 的 12 根细线结成一个网袋(正方体形状——译者). 向袋里放一个球. 设想这个球可以胀大, 直至细线所能容许的程度. 结果, 这个球把网袋张紧, 各条细线紧贴在球面上, 并且网袋的八个结点分布在球面上, 形成一个立方体的顶点.

计算放在网袋里的球的最大体积.

63. 海上演习 演习时, 大洋里军舰 A、B、C 的指挥员接到了海军上将的简短命令: 于最短时间内集中在一处. 由于不断进行无线电联络, 舰长们知道收到命令时各舰之间的距离为 $AB=100$ 海里, $AC=200$ 海里, $BC=220$ 海里. 各舰的最大速度: A 为 15 节, B 为 20 节, C 为 12 节. (1 节 = 1 海里/小时——译者)

怎样执行海军上将的命令?

64. 伪钱币 有四个外形完全相同的钱币. 它们每个应重 5 克, 但已知有一个不是 5 克重.

用一架等臂天平和一个五克重的砝码, 你能不能称两次就确定伪钱币? 它比真的重还是轻?

65. 道路网 需要用道路网把四个城市 A、B、C、D 连接起来. 由于筑路的经费最好尽量缩减, 一般说来, 道路网应该有交叉口.

求证: 经济的道路网, 它的交叉口总不多于两个.

66. 女裁缝 某男裁缝决定开设缝纫店. 他有五部不同种类的、供不同用途的缝纫机. 在报上登了广告以后, 有七个女裁缝应征候选. 男裁缝让每个人在五部机器上各干了一小时的活, 然后以兹罗提为单位估计各人的劳动生产率(取成品价值和所用材料价值之差). 结果得到下表:

机器 / 女裁缝	I	II	III	IV	V
A	4	3	5	8	12
B	10	4	6	8	8
C	15	1	12	11	11
D	11	9	5	8	14
E	1	10	3	9	12
F	4	7	11	3	2
G	5	2	2	10	1

应该录用哪几个人？对被录用的女裁缝应如何分配机器？

67. 追捕 6艘警察的汽艇包围了走私者的摩托艇. 汽艇在正六边形的各顶点处，而摩托艇在正六边形的中心. 摩托艇的最大速度是25节，汽艇是20节. 走私者听到警察队长命令自己的人始终向摩托艇方向前进.

走私者能脱离包围而逃脱追捕吗？ 如果能够的话，怎么逃？

68. 宇航员 落到一个小行星上的宇宙航行员，从他软着陆的地点 P_0 前往离它最远的点 P_1. 到达 P_1 略事休息后，宇航员前往离它最远的点 P_2. 他正打算继续这种不平常的旅行，忽然明白，由于 $P_2 \neq P_0$，所以他所走的路线无论何时都不会回到 P_0. 为什么？

69. 矿湖 某矿湖有着与众不同的特点：随便游艇处在它的哪一个点，游客总不能一眼就看到整个湖. 因此，希望欣赏整个湖泊的旅游者，不得不常改变自己的"观测所"的位置.

证明：如果在湖上找到了一点，从这点可以立刻把整个湖面一览无遗，那末所有这样的点填满某个凸区域.

70. 地图 学校里的墙上挂着一张矩形的地图. 某学生有一张类似的地图，它是把墙上的图精细地画在矩形透明纸

上的较小的摹本. 在自己的同学面前，这个学生夸耀说：不管多少次，也不管在什么位置，把这幅摹本复到学校的地图上去的话，总可以在这张图上找到一个点，使学校地图上与它重合的点对应于同一个地方. 甚至在不是正放，而是斜放(即两张图的边缘不平行)时也如此.

这个幸运的摹本所有者的结论对吗？

71. 罐头和细线 圆柱形罐头的高等于底面半径. 把罐头用一根线紧紧地扎起来，这根细线位于圆柱的轴截面上，并且通过它下底边上的两个豁口.

不解开细线，也不拉断它，能把它从罐头上取下来吗？细线处于何种状态：稳定还是不稳定？

72. 血型 早在1919年，朗特斯坦涅尔，扬斯基和莫斯确定了人们的血型有四种类型，O，A，B，AB. 知道了病人的血型后，为了把血安全地输给病人，需要预先知道输血者的血型. 我们用符号 $X\to Y$ 表示命题“X血型的人总可输血给Y血型的人”，那末输血法则可表示为：

I. 对每个X，$X\to X$.

II. 对每个X，$O\to X$.

III. 对每个X，$X\to AB$.

IV. 不能从I～III得到的其它所有关系式 $X\to Y$ 都是假的.

证明：

(1) 法则系统I～IV不矛盾；

(2) 若法则I～IV真，则对任何X、Y、Z，由 $X\to Y$ 和 $Y\to Z$ 可得 $X\to Z$；

(3) 从法则I～IV可得 $(\overline{A\to B})$，即关系式 $A\to B$ 的否定.

注 法则I～IV中的量词"对每个"和"所有"应理解为X和Y的位置可用四种血型O、A、B和AB中任何一种代替.

73. 再谈血型 三个医科大学生决定鉴定自己的血型，但不用别人的血或现成的血清. 为了判定命题X→Y(这个符号的含义见上题)是否正确，只要有X、Y的一滴血就够了. 我们不需要知道随后把这些血怎么办(虽然医科学生是知道的). 结果，他们鉴定了两个人的血型，但不能鉴定第三个人的. 经过一番思考，大学生们得出结论说，如果他们已经知道了第三个大学生的血型，那末他们就能鉴定任何病人的血型. 而且，为了鉴定病人的血型，他们不需要那两个已经知道了血型的大学生的血.

怎么解释这个似乎难以置信的结论?

74. 三谈血型 菲利克斯·伯恩斯坦——以集论方面的工作而知名的数学家——建立了血型O、A、B、AB的遗传性的第一个定律. 设父亲的血型是A，母亲的血型是AB，我们在单个字母A的右边写上字母O，以两个字母组合的符号AO表示父亲的血型. 为了得到孩子的血型，我们需要从父、母亲的血型AO和AB中各取一个字母，列出两个字母的全部组合.

得到了符号AA、AB、OA、OB之后，应该简化：两个相同的字母AA只取一个(A)，凡遇到字母O的组合总把O去掉. 结果得到四个符号，A、AB、A、B. 伯恩斯坦的定律断言：子女的血型应该属于三种血型A、B、AB之一(不可能是O型).

上面所说的规则(对单个字母加上字母O，从双亲的血型符号构成两个字母的组合，两个相同字母的组合里去掉一个

字母，而字母O总是从组合里去掉的）确立了——不仅在这个例子里，而且在一般情形——所谓血型遗传性的表现型理论.

既熟悉血型遗传性的表现型理论，又熟悉输血法则（见第72题）的两兄弟知道：他们两人不能互相输血，但他们的母亲可以输血给他们.

他们的姐妹能代替母亲成为两兄弟的输血者吗？

75. 圆里的方块 有64块边长为10 cm的正方形块.为了使方块都能放进半径为50 cm的圆内，应当怎么办？存在不存在能装进这64个方块的半径更小的圆？

76. 再谈方块 在半径为20 cm的圆内最多可以放置多少个边长为10 cm的方块？

77. 古老的塔 有一座象垂直放着的柱形的古老的塔——古代建筑学的珍贵的遗物.由于保护者用圆形的栅栏把它围了起来，所以只能在一定的距离观察它.栅栏的半径是10 m.沿栅栏绕着塔走，游览者的水平视角（看塔的两侧的水平视线之间的夹角）始终不变地是直角.在个别地方，栅栏只离开塔1 m，而在其它地方，栅栏和塔之间的距离较大.最大的距离为2 m.

需要确定塔的水平截面的形状和它的面积.

78. 跷跷板 把一块板搁在横放在地上的大木头上，就成了孩子们喜欢玩的跷跷板.如果板面是粗糙的，而且大木头的表面也没有加工过，那末板与木头之间不会有滑动.不难验证，如果大木头是圆柱形的，那末游玩时板的两端的轨迹不是直线.

求证：不仅对截面是圆的木头，而且对任何大树段，跷跷板两端的轨迹都不会是直线.

五、萨拉杰克博士的新数学趣事

79. 汽车问题 某汽车司机向同事借了3公斤煤油和5公升汽油，一起倒进了一个桶里，正好满到桶边，并且把它称了一下. 几天以后，同事来取桶，这个司机倒进了3.5公升煤油和4公斤汽油，桶又满到了边上，而且重量与第一次一样. 司机还给他同事的汽油(以及煤油)与借来的是同类的.

汽油和煤油的密度可以用普通的除法计算，不需要列出任何方程，但萨拉杰克博士知道得要多得多. 他断言：

(1) 司机们不善于区分煤油和汽油；

(2) 对于现代的汽车发动机来说，桶里的这种较重的燃料是不合适的；

(3) 他，萨拉杰克博士本人，能这样地解决问题：得到较轻的、连飞机发动机也可以使用的混合燃料.

他是怎么办的？

80. 魔书 萨拉杰克博士有一个图书馆，其中有一本书是他特别珍爱的，只在有一天对自己的学生说起过.

——把这本书随便翻到哪一页，告诉我那里写着什么数！——博士吩咐说. 顺从的学生说出了数4783.

——现在，随你翻多少页，告诉我你翻到的那一页上写着什么数！

执行了这个命令后，学生说出了数1955.

——现在，随你取两个四位数！——博士继续说.

学生选了2079和7081.

——请你从第一个得到的数(即从4783)开始，到第二个

(到1955)为止，按照书上的次序，大声地读出2079和7081之间的所有的数.

顺从的学生也完成了这个不容易的任务. 他必须念完2000个左右的数，从中去掉大约1000个.

然后，萨拉杰克博士叫学生检查一下，剩下来的数所形成的数列相邻项之差等于什么. 结果，这些差仅仅只取三个不同的值!!!

你能不能以一个不大的模型(萨拉杰克博士的书里有一万个数)为例，说明这本魔书的秘密在哪里？

81. 砝码 萨拉杰克博士有两个学生时代的朋友，一个在不久以前开了个小铺子，另一个开了个不大的店. 小铺子的主人经营各种(散装的)食品杂货，咖啡，米，面粉等等，而店主经营的是论个出卖的黄瓜，柠檬，青鱼等等，价格随重量而定.

萨拉杰克博士有两套砝码，一套是10、30、90和270克的，另一套是10、20、40、80和160克的. 把这两个朋友请来以后，萨拉杰克博士答应把这两套砝码送给他们，不过，他们每人只能取对自己最便利的那一套.

小铺子的主人和店主各取哪一套？

82. 奇怪的团体 某个人断言，他能挑选下列情况的12个人(包括他自己)组成的团体举行晚会：

(1) 每个出席者认识五个成员，但不认识其它的；

(2) 每人加入一个互相认识的三人小组；

(3) 在出席者中间找不到彼此全都认识的四个人；

(4) 在出席者中间找不到彼此全都不认识的四个人；

(5) 每人加入一个彼此不认识的三人小组；

(6) 对每个成员来说，在不认识他的人中有这样的人，他

和这个人在这个团体里没有共同的熟人.

听到这些以后，萨拉杰克博士宣称，他能组织满足条件(1)、(2)、(4)、(5)的团体，其中每个人认识且只认识六名成员，而且每个人有个熟人一起认识全体同事(即这样的熟人，他能介绍他认识所有原来不认识的人).

萨拉杰克博士和他的无名的先驱者的结论正确吗？能不能举出一个团体，它由满足条件(2)、(3)、(4)、(5)的十个人组成，其中每个人认识且只认识五个人，而且有一个熟人认识他所不认识的人，能不能举出，满足除条件(1)外全部条件的十个人组成的团体？

83. 智力冠军 萨拉杰克博士宣布说，如果允许他提出20个问题，那末他就能猜中词典①里的任何一个词.

这可能吗？

84. 粗心的教师 有一个教师，他想了解学生不同爱好之间的关系，打算调查一下自己的学生的爱好. 有一次，上课以后，教师请喜欢音乐和喜欢下象棋的学生举起手来. 音乐爱好者举左手，象棋爱好者举右手. 结果，有30%的人举起了两只手. 在象棋爱好者和自行车运动爱好者进行了类似的试验，结果有35%的学生举两只手. 在音乐爱好者和自行车运动爱好者进行的第三次试验中，举两只手的有40%的学生. 离开教室以后，教师才想起来，他忘记问哪些人这三方面都爱好，而且，他甚至没有统计一下，有多少学生每次都举了手. 虽然如此，萨拉杰克博士向他保证，他所问的学生里，显然有一些有多方面爱好的人.

萨拉杰克博士如此有把握地作出这个判断，有充分的根

① 萨拉杰克博士用的是C. 朗杰的《波兰语词典》，我们用《辞海》(1979年版)。——译者

据吗？

85. 三位棋手 在象棋俱乐部里，萨拉杰克博士经常遇到三位常客：吉米扬(D)，埃梅尔扬(E)和菲利克斯(F)．除了星期六和星期日，他们每天晚上都来，并且彼此各赛五盘．按照萨拉杰克博士的评定，这三个棋手的比赛等级分配如下：

从星期一到星期三，由于某种原因，吉米扬的竞技状态多少有点儿不佳，他的比赛萨拉杰克评定为 12 分．而在星期四和星期五，他已经发挥全部力量，以 17 分的等级比赛．埃梅尔扬不管哪一天都一样，按五盘计算，头三盘被评定为 16 分，但在后两盘，由于紧张和时间迟，比赛水平降低到 11 分．菲利克斯的竞技状态不易受任何波动，他的比赛萨拉杰克博士一直评定为 14 分．

上面所打的分数应当理解为：如果以 a 分比赛的棋手与以 b 分比赛的相遇，并且 $a>b$，那末前者总是胜的．

求 D 赢 E，E 赢 F，F 赢 D 的平均数．其次估计象棋俱乐部的常客 D、E、F 各人的"平均实力"．

86. 萨拉杰克博士的尺 在出售手工制品(亚麻布，包装纸，绳子)的商店里，要用有厘米刻度的木尺．从«一百个数学问题»第 94 题中已经知道，萨拉杰克的尺与商店营业员用的尺有些不同．

上面所列举的(以及没有说名字的)货物中，哪些用萨拉杰克博士的尺要比营业员通常用的更方便？

87. 萨拉杰克博士的温度计 萨拉杰克博士有一只有两种刻度的温度计：列氏① 和摄氏．某个人评论说，只是没有华氏刻度．

---

① 列氏温度计是法国物理学家 Reaumur 在 1730 年首先使用的，它把水的冰点到沸点分为 80 度．——译者

——不然，——萨拉杰克回答说——看一看我的温度计，只要知道普通的加法，您就能知道华氏温度！

怎么做到这一点呢？

88. 萨拉杰克和一个大政治问题 不久以前，萨拉杰克向联合国发出了一封冗长的抗议信，反对他们在秘书处文件里透露的一个计划.

计划规定，把全世界分成5个区域(欧洲，亚洲，美洲，非洲，大洋洲)，在每个区域建立一个国际监督站，它的任务包括监督该区域内各国严格遵守国际法. 按照计划起草者的打算，各站之间的距离应不小于一万公里.

是什么激起了我们这位出色的外交家的愤怒？

89. 碗和首都 萨拉杰克博士没有求助于地图册和地球仪，就解决了下述问题：

有没有一种球形的碗，它遮盖了地球的1/5表面，并且恰好罩住了20个国家——联合国成员(当时共有101个)——的首都？

90. 帕多麻脱① 众所周知，萨拉杰克博士是出色的棋手. 在决定世界象棋冠军的决赛中(在决赛中，这位当之无愧的象棋名手执白)，他的对手——匈牙利著名棋手凯达拉什——走了马 $g5\sim f7$ 将军，并且得到了胜利. 但，…萨拉杰克博士证明了，白棋所处的局势既不能算作将死，也不能算作无子可动. 因为它兼有两者的特点. 这种从未见过的棋局，按照萨拉杰克的正确意见，被叫做"帕多麻脱". 根据评判委员会的裁定，世界象棋冠军的称号分授给决赛的这两位参加者.

① "帕多麻脱"是 патомат 的音译，它由 пат(无子可动)和 мат(将死)复合而成，表示国际象棋中如本题所说的一种局势. ——译者

黑棋走了马 $g5\sim f7$ 后，棋盘上出现什么局势？

91. 萨拉杰克博士——弹子手 萨拉杰克博士有一张圆形的弹子台，在台子的栏板上剜一个洞. 游戏者把弹子摆在通过洞的圆台的直径上，并且瞄准着打弹子，使它从栏板弹回来落进洞里. 球可以按三种轨迹运动：直线（当球沿通过洞的直径运动时，它从这条直径的另一端弹回来）和两条折线，这两条折线关于通过洞的直径对称.

萨拉杰克博士顺便对我说，他总是适当地选择（弹子的）出发点，使它的三种轨迹的长度相等. 一般来说，直线轨迹的长度比折线轨迹的长度略小些. 例如，如果把弹子台的半径取作单位长，那末对于开始时离洞 1.5 的球来说，直线轨迹的长度是 2.5，而折线轨迹的长度大约是 2.6.

能不能把弹子的初始位置，选得使直线轨迹与折线轨迹的长度精确地相等？

92. 化圆为方 这个名称，萨拉杰克博士自己是给制图学里的下述问题的.

设想有一个海岛，它的海岸线是个理想的圆. 如何画出这样的岛的正方形地图？

这位大师殷勤地说明，为了把岛变换为地图，应该使海岸线转换为正方形的边界，而且严格地保持比例，即岛的面积相等的部分应该转换为地图上面积相等的区域.

六、运动问题

93. 三个赛跑运动员 三个选手 A、B、C 经常比赛 200 米，每次比赛后都记录了谁先越过终线，谁第二，谁第三. 运动

季节结束时的统计表明，A 在大多数友谊比赛中超过 B，B 在大多数场合比 C 快，而 C 也在大多数场合得到比 A 好的成绩.

这是如何得到的？

94. 体育比赛 所谓确定冠军的淘汰制（例如网球比赛里通行的制度）如下：

所有选手抽签分成两个一组（为简单起见，我们设有八个选手），各组的获胜者参加第二轮比赛（他们只有 4 个）. 第二轮比赛的两个得胜者进入第三轮决赛. 获胜者就是冠军.

假设每个选手的实力都是完全确定不变的，而且实力较强的运动员总战胜较弱的. 在这个条件下，淘汰制对于确定冠军来说是公平的，因为得到第一名的总是最强的选手. 但对于得到第二名的运动员来说，淘汰制就不能算是公平的了. 第二名总是参加决赛而被冠军打败的选手，按实力来说，他不一定是第二位的.

实力是第二位的选手取得第二名的概率有多大？

95. 再谈体育比赛 在实行淘汰制的比赛里，如果除了五个选手以外，其它选手都退出了比赛，那末，我们可以加进三个空额，使得总数仍然是八个. 设抽签以后三个空额都在秩序表末尾（即抽了 6, 7, 8 号）.

在选手中，能力是第二位的运动员，取得第二名的概率有多大？

96. 摩托车竞赛 煤渣跑道摩托车比赛迷中的一个不得不错过一次最有趣的比赛，他从朋友那里打听到：选手与比赛场次一样多，任两选手仅在一次比赛中相遇，在每次比赛里，与通常一样，四个选手出发.

摩托车竞赛爱好者得到的消息完全吗？

97. 埋有地雷的棋盘 在棋盘的某些格子里埋着地雷，

使得开始时，不管把王往那儿放，总不能从盘的左边走到右边. 证明：在这种情况下，车能只沿一些埋有地雷的格子从棋盘的上边走到下边.

也证明逆命题.

98. 棋盘上的车 取一个纵横相等(8×8)的棋盘，它与普通的棋盘略有不同：棋盘上黑白格分布不一定相间，可以是任意的，只是在每条直行上至少有一个白格，而且至少有一条直行都是白的. 如果下面的条件成立，我们能把车成功地放置在棋盘上(我们有足够的车，因此不会发生不够放的情况).

(1) 车只放在白格上；

(2) 在棋盘上至少放一个车；

(3) 车不能相互攻击(即每条直行或横排上至多放一个)；

(4) 每个没有放车的、但沿横排被车攻击的白格，也处于某个车沿直行的威胁之下.

证明：车总能同时按条件 1～4 分布.

99. 三维棋盘 在十六格的棋盘上可以这样地放棋子，使得所有横排、直行以及对角线上恰好有一个棋子.

取一个由 64 个小立方体组成的立方体. 这样的立方体可以分成 12 层(16 格棋盘 12 个).

证明：可以把 16 个棋子这样地放在大立方体的方块里，使每一层上各条横排和直行上恰好有一个棋子.

100. 再谈三维棋盘 分成小方块的立方体，可以看作一个三维棋盘. 普通棋盘有 $8^2=64$ 个方格，三维棋盘由 $8^3=512$ 个小方块组成. 可以这样制作：取一些 8 单位长的铅丝，使其中一些平行于 z 轴，且通过 xy 平面上坐标为 $x=p$、$y=q$ 的点；另一些平行于 y 轴，通过 xz 平面上坐标为 $x=p$、$z=q$ 的

点；还有一些平行于 x 轴，通过 yz 平面上坐标为 $y=p$、$z=q$ 的点．在三种情形里，整数 p、q 都取值 0，1，2，…，8．

需要把 64 个车，放在三维棋盘的 512 个小方块中的 64 块上，使任何一个车都不攻击别的车．在三维棋盘上，除了普通的——水平盘上的——着法外，车还能沿纵列上下移动任意距离．上面所说的车应该这样放：无论哪儿放上第 65 个车的话，一定处在这 64 个车之一的攻击之下．

七、低年级学生的问题

两个三角形　有两个三角形．第一个三角形的各边大于第二个三角形的任何一边．能不能说前者的面积大于后者的面积？

数数　我们大声地念：1，2，3，…，10，11，12，…，20，30，…，90，100，200，…，900，1000，2000，…，10000，20000等等．

这样念到一百万时，我们要数多少个数？念到十亿呢？

经济的桶　用微分学方法或更初等的方法可以说明，制造圆柱形罐头时，如果高和宽（底面直径）相等，所费的白铁最少．据此，不使用更多的微分学知识（甚至无需任何计算）证明：制造圆柱形桶（无盖）时，如果桶高等于宽度的一半（即桶底半径），那末费用最小．

四边形　A、B、C、D 是平行四边形的顶点．点 P 不在平行四边形的边所确定的任何一条直线上．

证明：存在以点 P、Q、R、S 为顶点的四边形，使 A、B、C、D 分别是它的边 PQ、QR、RS、SQ 的中点．

解　答

1. 设以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心、r为半径的圆，至少通过两个整点(x_1, y_1)、(x_2, y_2)，其中x_1, x_2, y_1, y_2是自然数或者0，并且$x_1 \neq x_2$，或$y_1 \neq y_2$. 那末这两个点到圆心的距离等于它的半径r：

$$r=\sqrt{(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2},$$

$$r=\sqrt{(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2}.$$

把这两个等式的右边平方，并使它们相等，得

$$(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\sqrt{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\sqrt{3})^2.$$

经过简单的变形，得

$$2(x_2-x_1)\sqrt{2}+2(y_2-y_1)\sqrt{3}=x_2^2-x_1^2+y_2^2-y_1^2.$$

这样，根据所作的假设，等式

$$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}=c$$

应该成立，其中a, b, c是整数(包括0). 但是对非0的所有整数a, b，$a\sqrt{2}+b\sqrt{3}$是无理数，而等式右边的数c，或者等于0，或者是非零的整数. 因此，这个等式只能在$a=b=c=0$，即$x_1=x_2, y_1=y_2$时成立，与假设矛盾. 这样一来，与假设的以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心、r为半径的圆，至少通过两个整点相矛盾. 由此我们断言，随着所取半径的不同，这样的圆或者只通过一个整点，或者不通过任何整点.

2. 利用上题的解答，解这个问题特别容易. 事实上，考虑以点$(\sqrt{2}, \sqrt{3})$为圆心和变动的r为半径的圆. 如果r

取得充分小，显然随便哪个整点都不会落在这个圆内. 现在，我们按下述方式把所有整点编号. 设 P_1 表示最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点；P_2 是除 P_1 外最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点；一般地，P_n 是除 $P_1, P_2, \cdots, P_{n-1}$ 外所有整点中最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点. 设 r_k 是 P_k 到点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离. 去掉了前面的整点后，在余下的整点中挑选最靠近点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的整点，我们一个个地把平面上所有的整点都编上号，并且它们离圆心 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离 $r_1, r_2, \cdots$ 形成单调增加数列：

$$r_1<r_2<r_3<\cdots<r_n<r_{n+1}<\cdots$$

事实上，如果对某个 n 有 $r_n=r_{n+1}$，这就是说，有两个不同的整点到点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 的距离相等. 根据上题，这是不可能的.

现在我们取一个数列 $R_0, R_1, R_2, \cdots$，满足不等式

$$R_0<r_1<R_1<r_2<R_2<r_3<\cdots,$$

那末以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 为圆心，R_i 为半径的圆，恰好包含 i 个整点 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_i$. 半径为 R_0 的圆内不包含任何整点.

类似地可以证明，在以点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ 为球心的球面上，至多只有一个(空间的)整点. 因而在三维空间里，存在内部恰好有 n 个整点的球.

3. 对于某些情形，我们只用足够详细的图来说明. 在必要时，这些情形的证明可以毫无困难地写出来.

(1) 图 2 表明内部没有整点的最大的圆，它的直径等于 $\sqrt{2}$.

(2) 图 3 表明内部恰好有一个整点的最大的圆，它的直径等于 2.

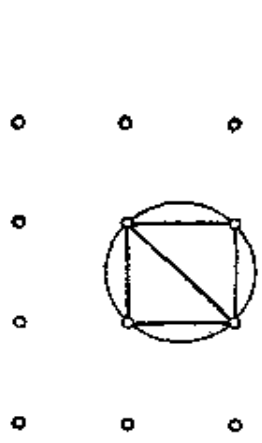


图 2

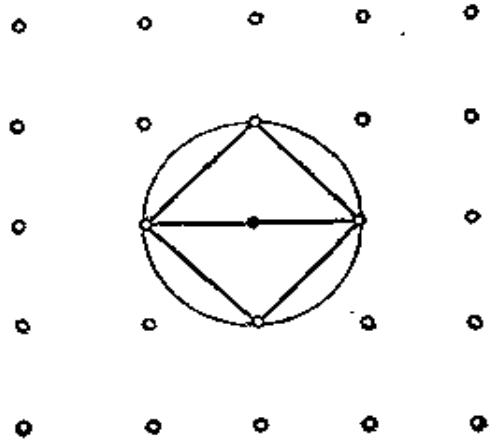


图 3

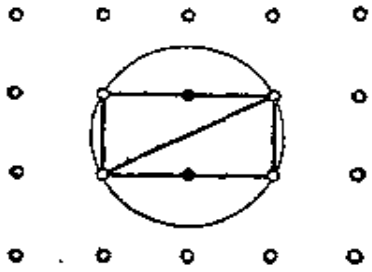


图 4

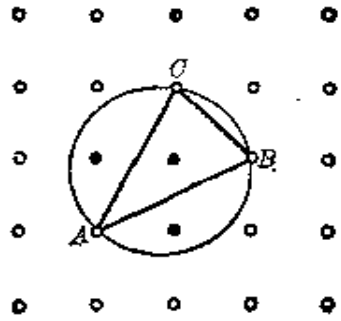


图 5

(3) 图 4 画出了内部含两个整点的最大的圆，它的直径等于$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

(4) 图 5 上表明内部有 3 个整点的最大的圆，我们来计算它的直径. 这个圆是三角形 ABC 的外接圆，它的边为 $AB=AC=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{2}$. $\triangle ABC$ 的高 h 和面积 S 分别是

$$h=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}},$$

$$S=\frac{1}{2}h\cdot BC=\frac{3}{2}.$$

由三角形外接圆半径 R 的关系式①有

$$2R=\frac{AB\cdot BC\cdot CA}{2S}=\frac{5\sqrt{2}}{3},$$

因而所求的直径等于 $5\sqrt{2}/3$.

(5) 直径为 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ 的圆(见图 6)，是内部包含 4 个整点的最大的圆.

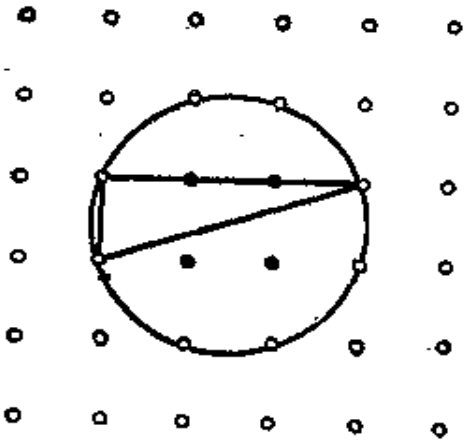


图 6

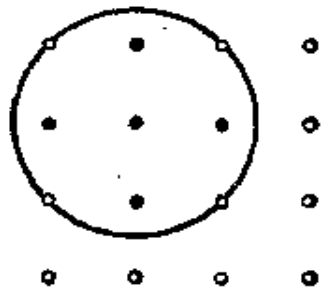


图 7

(6) 这种情形不但是最有趣的，也是最困难的. 图 7 里画了直径为 $2\sqrt{2}$ 的圆，内部有 5 个整点，但是它并非这样的圆里最大的一个(看起来似乎很象). 我们回到图 6. 这个图上的圆只包围了四个整点，把它稍微移动一下，立刻就至少使三个新的整点落到圆内. 所以，内部含有 5 个整点的圆的直径要小于 $\sqrt{10}$，从而小于内部含有四个整点的最大圆的直径. 我们要说明(这正是最有趣的地方)，内部恰好含有五个整点的最大的圆根本不存在.

考察图 8 里的整点，我们要找一个圆，在它内部含有点

① 设 a、b、c 是 $\triangle ABC$ 的三边，R 是外接圆半径，C 是它的内角之一，则 $\frac{c}{\sin C}=2R$，$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}$. ——译者

P_1、P_2、P_3、P_4 以及第五个点 P_5. 包含点 P_1、P_2、P_3、P_4 的最大圆的圆心在点 O，它的半径等于 OP_5. 作 $\angle P_5OP_7$ 的平分线，在此线上任取一点 Q，使它充分靠近 O 点. 以 Q 为圆心，QP_7 为半径作圆. 不难验证，点 P_5 落在这个圆内，因为 $QP_5<QP_7$. 同样容易知道，把半径为 OP_5 的圆的圆心，从点 O 移到点 Q 的时候（除 P_5 外），其它任何整点都不会落到这个圆内，而本来在这个圆内的整点也不会跑到圆外去. 这样，选取充分靠近点 O 的点 Q 时，可以得到半径与

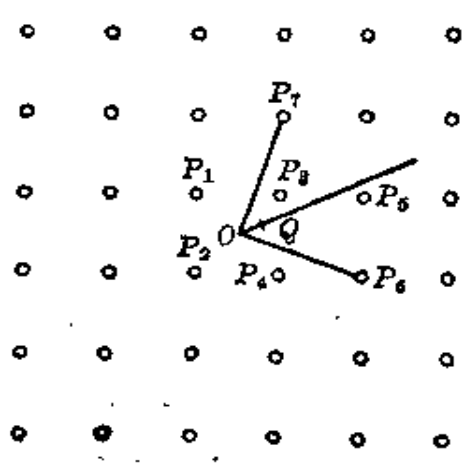


图 8

$$OP_5=\sqrt{10}/2$$

相差任意小的、内部有五个整点的圆. 但直径为 $\sqrt{10}$ 的圆内，或者有四个整点，或者马上就包含 7 个整点. 在这样的圆里，既不可能有 5 个整点，也不可能有 6 个整点.

内部含有 6 个整点的最大的圆，它的直径是 3（小于 $\sqrt{10}$）. 内部含有 7 个整点的最大的圆，它的直径必大于 $\sqrt{10}$.

4. 内部可仅含有 1、2、3、4 个整点的圆，它的直径 d_1、d_2、d_3、d_4 分别满足不等式

$$0<d_1\leqslant 2,\quad 1<d_2\leqslant\sqrt{5},$$

$$\sqrt{2}<d_3\leqslant\frac{5\sqrt{2}}{3},\quad \sqrt{2}<d_4\leqslant\sqrt{10}.$$

因此，随着位置的不同，而在内部可以含有 1、2、3、4 个整点的圆，它的直径 d 应该同时满足这四个不等式：

$$\sqrt{2}<d\leqslant 2.$$

直径满足这个不等式的圆，把它移动后，不可能使它里面有5个整点．因为从图9可见，这样的圆的直径应该大于2．把直径$d\leqslant 2$的圆移动，更不可能使它内部至少有5个整点．因而，在直径d满足不等式$\sqrt{2}<d\leqslant 2$的圆内，只能有1、2、3或4个整点．这样，就得到了本题第一部分的回答．

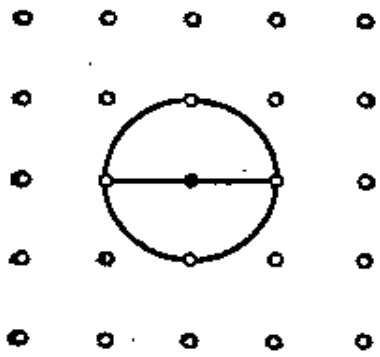


图 9

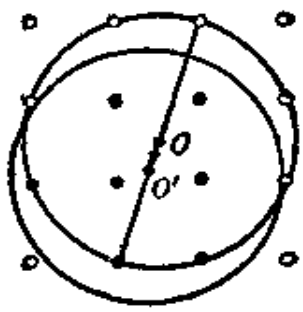


图 10

为了解答第二部分，要利用问题3．我们已经知道，内部有4个整点的最大的圆，它的直径是$\sqrt{10}$，而内部有5个整点的圆的直径应该小于$\sqrt{10}$．因而，移动直径是$\sqrt{10}$的圆，不可能使它内部含有5个整点．

类似地可以证明，直径为$\sqrt{10}$的圆内不可能出现6个整点．但是，可以移动这样的圆，使它内部含有7(图10)，8(图11)或9(图12)个整点．

考察一组组不同的十个整点，可以确认，包围10个整点的圆的直径应该大于$\sqrt{10}$．因而，直径为$\sqrt{10}$的圆内不可能有10个整点．

5．条件$a^2+d^2=b^2+c^2$说明，数a、d和b、c可以是有公共斜边的两个直角三角形的直角边长．

把等式$a+d=b+c$两边平方，并利用上述条件，我们得

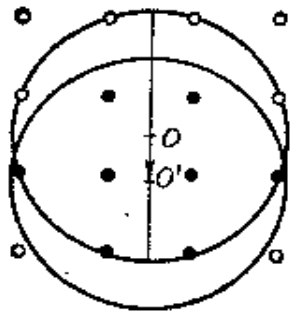


图 11

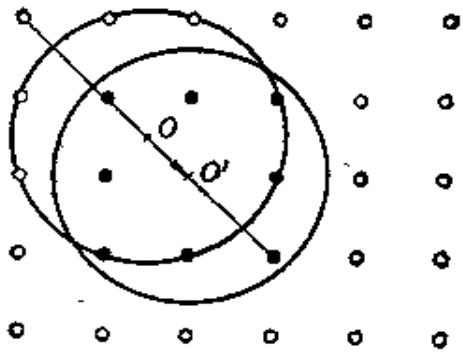


图 12

到 $ad=bc$，或者说，这两个直角三角形有相同的面积，因而斜边上的高相等(图 13)．此外，这两个三角形相似．因为

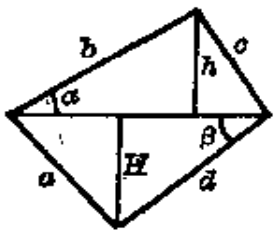


图 13

$$h\operatorname{ctg}\alpha+h\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)$$
$$=H\operatorname{ctg}\beta+H\operatorname{ctg}(90^\circ-\beta),$$

而 $h=H$，所以

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\beta,$$

或 $\sin 2\alpha=\sin 2\beta$．由于 $0<\alpha、\beta<90^\circ$，故 $\alpha=\beta$，从而直角边两两相等．这与条件 $0<a<b<c<d$ 矛盾．

6．首先证明，如果本题的回答是肯定的，也就是，如问题条件所要求的那样，能够把区间 $[0, 1]$ 划分成两个集，那末在区间 $[0, 1]$ 上的任一点 α，函数 $f(x)$ 应满足不等式 $f(x)\neq x$．

事实上，设对 $[0, 1]$ 中的某个 x_0，有 $f(x_0)=x_0$．按照问题的条件，如果 $x_0\in A$，那末 $f(x_0)\in B$．但这意味着 x_0 同时属于不相交的集 A 和 B．这个矛盾证明了对所有 $x\in[0, 1]$ 有 $f(x)\neq x$．

从问题的条件可知，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，特别地有 $0\leqslant f(0)\leqslant 1$，$0\leqslant f(1)\leqslant 1$．但 $f(0)\neq 0$，$f(1)\neq 1$，所以 $0<f(0)\leqslant 1$，$0\leqslant f(1)<1$．设

$$\varphi(x)=f(x)-x,$$

对引进的新函数 $\varphi(x)$，不难知道，

$$\varphi(0)=f(0)>0,$$

$$\varphi(1)=f(1)-1<0.$$

作为两个连续函数的和，函数 $\varphi(x)$ 也在区间 $[0, 1]$ 上连续. 由于它在区间端点有相反符号的值，所以（根据连续函数的中间值定理）在某个点 $\xi(0<\xi<1)$ 应有 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)-\xi=0$，$f(\xi)=\xi$. 但我们已经知道，这不可能.

7. 把数 $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$ 记为 x，我们得到了方程 $x=\sqrt{5+\sqrt{3+x}}$. 用逐次逼近法，可以从这个方程求出 x 的值. 当 $x=2$ 时，方程右边等于 2.69，而 $x=3$ 时，等于 2.73. 因此 x 的真值在 2.69 和 2.73 之间. 接下去的一步（即令 $x=2.69$——译者），得到近似值 $x\approx 2.718$. 这样，$x<3$.

也可以通过其它途径解这个问题. 经过初等变换，方程 $x=\sqrt{5+\sqrt{3+x}}$ 变形为 $x^4-10x^2-x+22=0$，所求的数是这个方程的一个根. 不难知道，$x=-2$ 满足这个方程. 左边除以 $x+2$，得三次方程 $x^3-2x^2-6x+11=0$. 它的根的近似值（精确到 10^{-6}）是 $x_1=2.718709$，$x_2=1.683969$，$x_3=2.402678$. 这三个根都小于 3. 本题所求的是第一个根 $x_1=2.718709$. 这样，$\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}<3$.

有价值的是，我们考察的这个数 x 是数 e 的很好的近似值，因为精确到 10^{-6} 时，$e\approx 2.718281$，此时 $x-e<0.0005$.

这样，使我们能从前面所作的论证里，得到一些几何的结论. 众所周知，数 e 是超越数（它不是任何有理系数的代数方程的根），如果给定单位长线段，它不可能用圆规和直尺作出.

正是近似式

$$e\approx\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\cdots}}}}$$

使我们能近似地作出 e. 事实上，不难验证

$$\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}}}}}\approx 2.718.$$

左边的数可以从 1 通过有限次加法和开平方得到，因此这个数能够用圆规和直尺作出. 下面是作法.

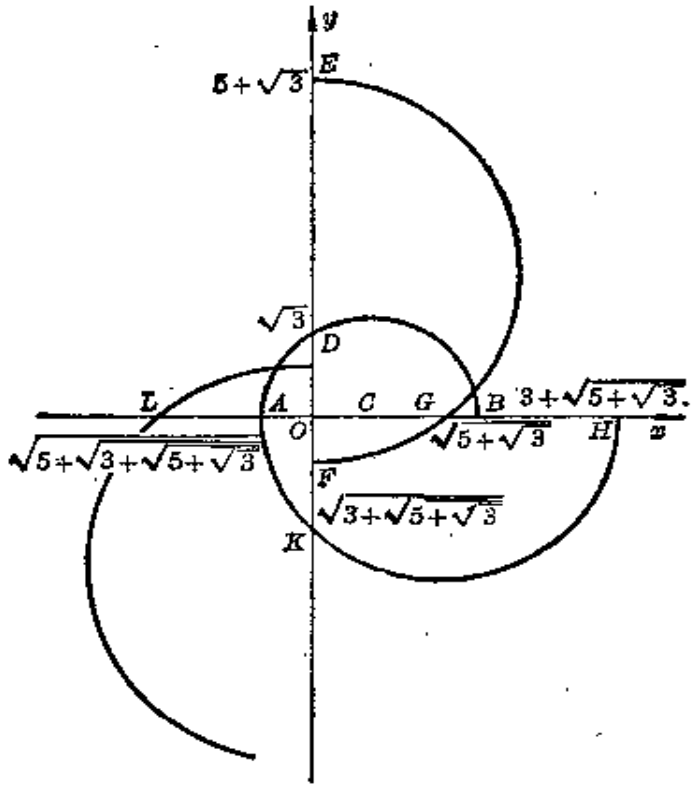


图 14

作两条直线垂直相交于 O 点(图 14). 在直线 Ox 上截取线段 $OA=1$, $OB=3$. 以 AB 为直径作半圆，在直线 Oy 上得到线段 $OD=\sqrt{3}$. 其次，在直线 Oy 上截取线段 $DE=5$, $OF=1$, 以 EF 为直径作半圆. 由于 $EO=5+\sqrt{3}$, $OF=1$,

所以 $OG=\sqrt{5+\sqrt{3}}$，这里 G 是第二个半圆与直线 Ox 的交点. 在直线 Ox 上截取线段 $BH=3$, $OA=1$, 利用以 AH 为直径的半圆，我们可以作出线段 $OK=\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}$，然后用类似的方法作出线段 $OL=\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}}}}$ 等等. 在反复进行八次这样的作图后，得到了线段 $x\approx 2.718$.

8. 这个有价值的、虽然是不复杂的问题，是在用有理数逼近无理数的理论中产生的.

不失一般性，可以认为 p、q 是自然数. 事实上，如果 p、q 取不同符号，那末有

$$\sqrt{2}-\frac{p}{q}>\sqrt{2},$$

当然更有

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}.$$

如果这两个数都是负数，那末令 $p_1=-p$, $q_1=-q$，我们就把问题化成证明不等式

$$\left|\sqrt{2}-\frac{p_1}{q_1}\right|>\frac{1}{3q_1^2},$$

其中 p_1 和 q_1 是自然数.

首先考虑 $p/q>\sqrt{2}$ 的情形. 设 $p/q<1.55$. （由于 $\sqrt{2}<1.45$，分数 $p/q>1.55$ 与 $\sqrt{2}$ 之差大于 $1/10$，而分数 $1/3q^2$ 从 $q=2$ 开始小于 $1/10$. 因此，对 $p/q>1.55$，要证的不等式显然是成立的.）

这样，设 $p/q<1.55$. 我们有

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-2=\frac{p^2-2q^2}{q^2}.$$

因为数 p^2-2q^2 是自然数，所以

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2-2\geqslant\frac{1}{q^2},$$

即 $$\left(\frac{p}{q}+\sqrt{2}\right)\left(\frac{p}{q}-\sqrt{2}\right)\geqslant\frac{1}{q^2}.$$

因而 $$\frac{p}{q}-\sqrt{2}\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{p/q+\sqrt{2}}.$$

由于 $p/q<1.55$, 所以

$$p/q+\sqrt{2}<1.55+1.45=3,\quad \frac{1}{p/q+\sqrt{2}}>\frac{1}{3}.$$

这样一来, 如果 $p/q>\sqrt{2}$, 那末

$$\frac{p}{q}-\sqrt{2}>\frac{1}{3q^2},$$

这就是需要证明的.

如果 $0<p/q<\sqrt{2}$, 那末

$$2-\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{2q^2-p^2}{q^2}\geqslant\frac{1}{q^2},$$

由此, $$\sqrt{2}-\frac{p}{q}\geqslant\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+\frac{p}{q}}>\frac{1}{q^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}>\frac{1}{3q^2}.$$

这样, 当 $0<p/q<\sqrt{2}$ 时, 下面的不等式成立

$$\sqrt{2}-\frac{p}{q}>\frac{1}{3q^2}.$$

由于对整数 p、q 来说, 不可能有等式 $p/q=\sqrt{2}$, 我们已经对所有的整数偶 p 和 $q(q\neq0)$ 证明了所要证的不等式.

9. 我们用反证法证明, ξ 不可能取区间 $[1/2, 2/3]$ 中的值. 设 ξ 满足不等式 $1/2\leqslant\xi\leqslant2/3$, 用 ξ_1 表示连分数

$$\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}},$$

那末 $\xi=\dfrac{1}{a+\xi_1}$，由此

$$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{a_1+\xi_1}\leqslant\frac{2}{3},$$

$$\frac{3}{2}\leqslant a_1+\xi_1\leqslant 2. \qquad (*)$$

不难证明 $0<\xi_1<1$，故 $a_1=1$. 在序列 $\{a_n\}$ 中，每个自然数出现且仅出现一次，因而 $a_2\geqslant 2$. 但这样一来，ξ_1 应满足不等式 $\xi_1<1/2$. 这与(*)式矛盾，因为由(*)式 ξ_1 应满足不等式 $1/2\leqslant\xi_1\leqslant 1$.

得到的这个矛盾说明，原来所作的假设 $\xi\in[1/2,\ 2/3]$ 是不正确的. 因此 $\xi\in[1/2,\ 2/3]$，这正是需要证明的.

在开区间 $(0,\ 1)$ 里，实际上存在着无穷多个区间（与 $[1/2,\ 2/3]$ 不同且彼此不同），它们由 ξ 的"不可达到的"值填满. 我们只写出几个例子：$[7/10,\ 3/4]$，$[5/7,\ 8/11]$，$[9/11,\ 5/6]$等等. 证明这些区间的"不可达到性"不会有什么困难. 每个形如$\left[\dfrac{2k+1}{2k+3},\ \dfrac{k+1}{k+2}\right]$的区间，对 ξ 来说也是不可达到的，这里 $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$（$k=1$ 时，就是上面考察过的区间$[1/2,\ 2/3]$）. 对这种场合证明"不可达性"也不复杂，可以如本题解答的第一段那样进行.

10. 设 $\{a_n\}$ 是满足题设条件的正数列. 因为 $a_n-a_{n+1}=a_{n+2}>0$，所以序列 $\{a_n\}$ 是递减的. 又由于它是正项，所以有界.

考虑序列

$$\{b_n\}=\left\{a_{n+1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right\}.$$

我们要证明，它的项之间存在下面的关系：

$$b_{n+1}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}b_n.$$

事实上，

$$b_{n+1}+b_n\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=a_{n+2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}+\left(a_{n+1}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_n\right)\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$=a_{n+2}+\frac{1-\sqrt{5}}{2}a_{n+1}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}a_{n+1}-a_n$$

$$=a_{n+2}+a_{n+1}-a_n$$

$$=0.$$

特别地，由此可得

$$b_n=\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n b_0.$$

但

$$\left|-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|>1,$$

而序列 $\{b_n\}$ 有界，所以 $b_0=0$. 从而，不仅当 $n=0$ 时 $b_n=0$，而且对所有自然数 n 有 $b_n=0$，因此

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_n.$$

因为 $a_0=1$，所以

$$a_n=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n.$$

这样，本题中所说的性质唯一地确定了一个序列.

12. 考虑由关系式

$$a_0=2,\ a_n=a_{n-1}^2-n\quad(n\geqslant 1)\tag{1}$$

定义的数列. 我们要证明，所有的 a_n 满足不等式

$$a_n>n.\tag{2}$$

直接检验可知，不等式(2)对 a_0, a_1, a_2, a_3 成立. 设对某个 $k\geqslant 3$, 有 $a_k>k$, 根据(1)式有

$$a_{k+1}=a_k^2-(k+1)>k^2-(k+1)=k^2-k-1.$$

容易证明, $k\geqslant 3$ 时，不等式

$$k^2-k-1>k+1$$

成立，所以

$$a_{k+1}>k+1,$$

证明完成.

从不等式(2)得知，对任意 $n\geqslant 0$, 有

$$a_n>0. \tag{3}$$

由(1)及(3)式，直接得到一连串的不等式

$a_0>0$, $\quad a_3=[(a_0^2-1)-2]^2-3>0$,

$a_1=a_0^2-1>0$, $\quad a_4=\{[(a_0^2-1)^2-2]^2-3\}^2-4>0$,

$a_2=(a_0^2-1)^2-2>0$, $\quad \cdots\cdots$.

解出 a_0, 得

$a_0>0$, $\quad a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

$a_0>1$, $\quad a_0>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}}$,

$a_0>\sqrt{1+\sqrt{2}}$, $\quad \cdots\cdots$.

总之，对任何自然数 n,

$$a_0=2>\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}.$$

13. 本题的回答是否定的，不存在满足本题条件的三角形. 证明如下.

设 ABC 是边长为自然数 a、b、c 的三角形(图 15)，高 CD 等于底边 AB.

首先，我们发现 $a\neq b$ (否则应有等式 $(2a)^2=5c^2$, 这是不可能的). 不失一般性，设 $a>b$. (我们指出，不等式 $b\leqslant c$ 也不

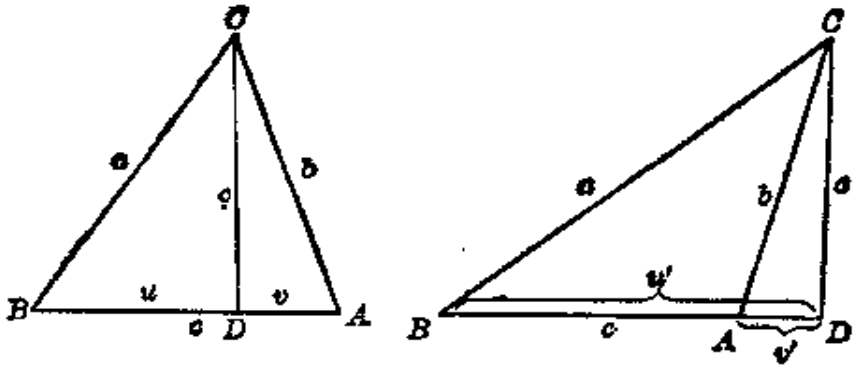


图 15

可能成立.)

注意到三角形元素之间的关系,我们得到下列方程组:

$$\begin{cases} a^2=c^2+u^2, & (1)\\ b^2=c^2+v^2, & (2)\\ c=u+v, & (3) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a^2=c^2+u'^2, & (1')\\ b^2=c^2+v'^2, & (2')\\ c=u'-v'. & (3') \end{cases}$$

其中 u、v、u'、v' 可以证明应是自然数.

例如,我们证明 u、v 是自然数. 因为 $a>c$, 所以 $k=u^2=a^2-c^2$ 是自然数,而 $u=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2c}$, 一般说来是正有理数. 把它表示成 $u=p/q$ 的形式,这里 p、q 是满足 $(p, q)=1$ 的自然数[(p, q)表示 p, q 的最大公约数,$(p, q)=1$, 也就是说, p, q 是互素的——译者].

把式 $u=p/q$ 两边平方, 得 $p^2=kq^2$, 这里 $k=u^2$ 是自然数. 由此可得 $q=1$. 这说明, $u=p$ 和 $v=c-p$ 都是自然数. 类似地可以证明,数 u' 和 v' 也都是自然数.

这样,本题就归结为解自然数 a、b、c、u、v 的方程组

$$\begin{cases} a^2-b^2=u^2-v^2, \\ c=u+v, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a^2-b^2=u^2-v^2, \\ c=u-v, \end{cases}$$

其中 $a>b>c$.

我们要证明，自然数 a、b、u、v(其中 $a>b$)的方程

$$a^2-b^2=u^2-v^2$$

的全部解由下式确定：

$$\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}(ms+nr), \quad b=\dfrac{1}{2}(ms-nr), \\ u=\dfrac{1}{2}(ns+mr), \quad v=\dfrac{1}{2}(ns-mr), \end{cases} \tag{4}$$

其中 m、n、r、s 是自然数，满足条件 $(m, n)=1$，$ms>nr$，$ns>mr$，并且，或者 r 和 s 是偶数，或者 m、n、r、s 都是奇数. 方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$ 的每一个自然数解，都在(4)式确定的数中出现且仅出现一次.

设 a、b、u、v 是满足方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$ 的自然数，$s=(a+b, u+v)$. 那末 $a+b=ms$，$u+v=ns$，这里 m、n 是互素的自然数. 把它们代入方程

$$(a-b)(a+b)=(u+v)(u-v),$$

得

$$(a-b)m=(u-v)n.$$

由于 $(m, n)=1$，所以 $n\mid(a-b)$["$\mid$"是整除符号，$n\mid(a-b)$就是 n 整除 $a-b$——译者]，又因为 $a>b$，所以 $a-b=nr$，这里 r 是某个自然数. 把它代入方程 $(a-b)m=(u-v)n$，得 $nrm=(u-v)n$，即 $u-v=mr$. 解关于 a，b，u，v 的方程组

$$\begin{aligned} a+b&=ms, \quad & u+v&=ns, \\ a-b&=nr, \quad & u-v&=mr \end{aligned}$$

便得到(4)式.

因为 u、v 是自然数，所以应有 $ns>mr$ 和 $ms>nr$. 其次，r 和 s 应该同是偶数或者同是奇数. 事实上，如果 r 是奇数，而 s 是偶数，那末由等式 $ms+nr=2a$ 应该得到 n 是偶数，而从等式 $ns+mr=2u$ 应得 m 也是偶数. m 和 n 同是偶数与 $(m, n)=1$ 矛盾. 如果 r 和 s 都是奇数，那末从等式 $ms+nr=2a$，得 m 和 n 也都是奇数[由于 $(m, n)=1$，它们不可能同是偶数；由于 $ms+nr=2a$，它们不可能一个是奇数，一个是偶数]. 于是，或者 r 和 s 都是偶数，或者 m、n、r、s 都是奇数.

另一方面，如果自然数 m、n、r 和 s 具有这样的性质，并且 $(m, n)=1$，$ms>mr$，$ms>nr$. 容易知道，由(4)式定义的数 a、b、u、v，满足方程 $a^2-b^2=u^2-v^2$. 也不难验证，在由(4)式定义的数中间，这个方程的每一个解出现且仅出现一次. 事实上，从(4)式可知，$a+b=ms$，$u+v=ns$，这两个等式说明[由于 $(m, n)=1$]，$s=(a+b, u+v)$. 由此容易推知，数 s、m、n 和 r 完全由 a、b、u 和 v 确定. 这就证明了我们的结论.

结合(4)式和(1)、(3)式[或(2)、(3)式]，我们得到

$$m^2s^2+n^2r^2=4n^2s^2+n^2s^2+m^2r^2,$$

或

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2)-(n^2-m^2)(r^2-s^2)=4n^2s^2, \qquad (5)$$

并且 $(m, n)=1$.

现在要证明，方程(5)没有自然数解，从而以(4)式代入(1′)和(3′)式，得到的方程

$$(m^2-n^2)(s^2-r^2)=4m^2r^2 \qquad (5')$$

也没有自然数解.

不失一般性，设 $(r, s)=1$. [若 $(r, s)=d>1$，则可设

$r=dr_1$，$s=ds_1$，得 $(m^2-n^2)(s_1^2-r_1^2)=4n^2s_1^2$，其中 $(r_1, s_1)=1$.]

设 $m>n$ 时，$(m^2-n^2, 4s^2)=\alpha$，则 $m^2-n^2=\alpha\gamma$，$4s^2=\alpha\delta$，其中 γ、δ 是自然数，且 $(\gamma, \delta)=1$. 把这些式子代入(5)式，得 $(s^2-r^2)\alpha\gamma=n^2\alpha\delta$，或 $(s^2-r^2)\gamma=n^2\delta$. 因为 $(\gamma, \delta)=1$，所以 $\delta|(s^2-r^2)$，$s^2-r^2=\beta\delta$，这里的 β 是某个自然数. 这样，$\beta\gamma\delta=n^2\delta$，或 $n^2=\beta\gamma$. 另一方面，如果 α、β、γ、δ 是自然数，$m^2-n^2<\alpha\gamma$，$s^2-r^2=\beta\delta$，$n^2=\beta\gamma$，$4s^2=\alpha\delta$，那末 $(m^2-n^2)\times(s^2-r^2)=4n^2s^2$.

由于 $(m^2-n^2, n^2)=1$[这可从 $(m, n)=1$ 得到]，故 $\gamma=1$. 而从等式 $s^2-r^2=\beta\delta$，$4s^2=\alpha\delta$ 和 $4s^2-4(s^2-r^2)=4r^2$ 得知 $\delta|4r^2$，$\delta|4s^2$. 但 $(r, s)=1$，故 $(r^2, s^2)=1$，从而 $\delta|4$. 这样一来，$\delta=4$，或 $\delta=2$，或 $\delta=1$.

如果 $\delta=4$，那末 $m^2-n^2=s^2$，$s^2-r^2=4n^2$，因此 $s^2+n^2=m^2$，$r^2+(2n)^2=s^2$. 最后的式子说明(由于 $(r, s)=1$)，存在自然数 p、q，使 $n=pq$，$s=p^2+q^2$，$(p, q)=1$. 因而 $s^2+n^2=p^4+3p^2q^2+q^4=m^2$.

正如 H. C. Pocklington 证明过的，方程 $x^4+kx^2y^2+y^4=z^2$ 对 k 的某些值没有自然数解 x、y、z，其中有 $k=3$.

若 $\delta=2$，则 $m^2-n^2=2s^2$，$s^2-r^2=2n^2$ 或 $n^2+2s^2=m^2$，$r^2+2n^2=s^2$. 第一个等式的两边乘以 r^2，第二个等式的两边乘以 m^2，我们得到 $n^2r^2+2r^2s^2=m^2r^2$，$m^2r^2+2m^2n^2=m^2s^2$，由此，$2m^2n^2+2r^2s^2=m^2s^2-n^2r^2$. 令

$$x=mn, \quad y=rs,$$

$$a_1=\frac{(ms+nr)}{2}, \quad b_1=\frac{(ms-nr)}{2}.$$

因为数 $m^2s^2-n^2r^2$ 是偶数，所以 ms 和 nr 或者都是偶数，

或者都是奇数. 由此可得，a_1 和 b_1 是自然数. 不难验证，$x^2+y^2=2a_1b_1$，$xy=a_1^2+b_1^2$. 因而 $x^4+3x^2+y^4=(a_1^2+b_1^2)^2$. 这样，我们又得到了 Pocklington 方程，它没有自然数解.

最后，若 $\delta=1$，则 $m^2-n^2=4s^2$，$s^2-r^2=n^2$. 从毕达哥拉斯方程 $n^2+(2s)^2=m^2$[注意到$(m, n)=1$]推知，s 是偶数. 从另一个毕达哥拉斯方程 $n^2+r^2=s^2$——由于$(r, s)=1$——可知 s 是奇数. 这样，方程组

$$\begin{cases} n^2+(2s)^2=m^2, \\ n^2+r^2=s^2 \end{cases}$$

是矛盾的.

类似地可以证明，$m<n$ 时，以及方程(5′)也导致矛盾.

这样，有整数边长的、底边上的高等于底边的三角形不存在.

14. 容易知道，恒等式

$$\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{n(2n+1)}$$

成立. 由此可知，方程

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \tag{1}$$

当 $a=2n$，$b=2n+1$，$c=n(2n+1)$，$d=2n(2n+1)$时，就有满足不等式

$$a<b<c<d \tag{2}$$

的无穷多个自然数解.

我们要证明，满足方程(1)和不等式(2)的四个素数不存在. 用反证法，设存在这样的四个素数. 把方程(1)变形，容易得

$$cd(b-a)=ab(d-c).$$

由此可得 $b\mid cd(b-a)$. 由于 b 与 cd 互素，故 $b\mid(b-a)$，但这

是不可能的.

15. 这个问题的回答是否定的. 对四面体在平面上的任意两个位置A和B, 可以指出一条从A滚到B的道路, 使得从B返回到A时, 必定与原来的道路有重合部分. 为此只要看一看图 16 就可明白. 如果离开A后, 绕着它沿螺旋线滚动至B, 就得到了否定的回答.

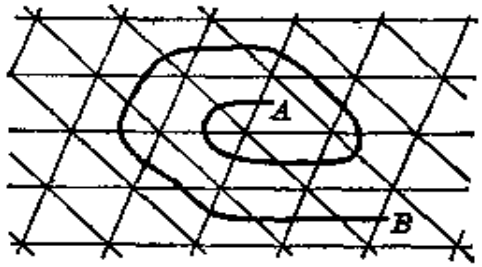


图 16

16. 不难猜到, 本题的思想是作者从菲利克斯·汪克尔的转子发动机——有旋转活塞的内燃机——结构得到启示的. 若干年前, 这种不同一般的发动机的方案, 就已广泛地讨论过. 在汪克尔发动机(我国通常叫"三角活塞旋转式发动机"——译者)里, 活塞(实际上是转子, 它是棱柱形的, 底面是等边三角形)在汽缸内旋转, 用侧棱沿着它的壁滑动. (不言而喻, 我们谈的是发动机的理想化的几何方案. 在实际结构中, 转子的侧棱和缸壁之间有隙缝.) 从几何观点来看, 转子的运动可以归结为处于某条闭曲线内的等边三角形的运动, 即这个三角形的顶点沿这条曲线滑动. 由于发动机应该作功, 并且转子的运动必须传递给机器, 三角形的中心应该描出一个圆. 应当注意, 这个圆不是三角形顶点沿着运动的那条曲线, 否则汽缸由转子截出的部分保持不变的体积, 当转子旋转时, 不可能产生周期地更替的压缩阶段(作功应有四冲程——译者).

在这个问题里, 只考虑汪克尔发动机理论里可能产生的一条曲线.

在闭曲线内, 等边三角形的运动允许推广到任意正多边

形的情形.

首先，我们推导"固定"于小圆内的那个点描出的曲线的方程. 大圆的圆心取作坐标原点(图 17). 设 P_0 是小圆圆心的初始位置(在 x 轴上)，P 是转动角 t 后所在的位置. 同时，原来的切点 A_0 转换为 A 点；而定点从位置 M_0 移动到位置 M.

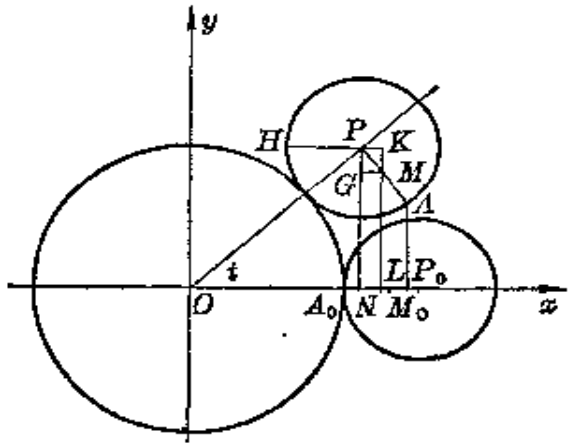


图 17

因为大圆半径是小圆半径的两倍，所以 $\angle OPA=2t$，而 $\angle HPA=3t$，这里 $HP\parallel OP_0$. 设 $x=OL$，$y=LM$，x、y 是 M 点的坐标，那末

$$x=ON+NL=ON+PK,$$

$$ON=9\cos t,$$

$$PK=PM\cos\angle MPK=-PM\cos\angle HPM=-\cos 3t,$$

$$y=PN-PG=9\sin t-\sin 3t.$$

这样，所求曲线的方程可以以参数形式表示为

$$\begin{aligned} x&=9\cos t-\cos 3t,\\ y&=9\sin t-\sin 3t. \end{aligned}\qquad (*)$$

我们要证明，内接于曲线 (*) 的等边三角形 T 可以这样运动：它的所有顶点将同时跑过整条曲线. 为此只要证明，若 $Q_1(x_1, y_1)$ 是曲线(*)对应于参数值 t_1 的某个点，$Q_2(x_2, y_2)$ 是这条曲线对应于参数值 $t_2=t_1+\frac{2\pi}{3}$ 的点，那末它们之间的距离

$$Q_1Q_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

与 Q_1 的位置无关，也就是说，与参数值 t_1 无关.

事实上，

$$\cos t_2=\cos\left(t_1+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1),$$

$$\sin t_2=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos t_1-\sin t_1),$$

由此，

$$\begin{aligned}x_2&=9\cos t_2-\cos 3t_2\\&=-\frac{9}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_2-x_1&=\left[-\frac{9}{2}(\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1\right]\\&\quad-(9\cos t_1-\cos 3t_1)\\&=-\frac{27}{2}\cos t_1-\frac{9\sqrt{3}}{2}\sin t_1.\end{aligned}$$

类似地计算差 y_2-y_1：

$$y_2-y_1=\frac{9\sqrt{3}}{2}\cos t_1-\frac{27}{2}\sin t_1$$

这样，

$$\begin{aligned}Q_1Q_2&=\frac{9}{2}\sqrt{(3\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)^2+(3\sin t_1-\sqrt{3}\cos t_1)^2}\\&=9\sqrt{3}.\end{aligned}$$

所以，以这条曲线上对应于参数值 t_1，$t_1+2\pi/3$，$t_1+4\pi/3$ 的点 $Q_1(x_1, y_1)$，$Q_2(x_2, y_2)$，$Q_3(x_3, y_3)$ 为顶点的三角形是等边三角形. 如果它的顶点 Q_1（当参数 t_1 从 0 变到 2π 时）描出了整条曲线，那末它的另两个顶点也画出了整条曲线.

在回答本题第一个问题时，同时也回答了第二个问题：三

角形 T(即 $\triangle Q_1Q_2Q_3$)的边长等于 $9\sqrt{3}$ cm.

现在证明,当三角形 T 沿曲线(*)运动时,它的中心的轨迹是以坐标原点为中心,以 1 cm 为半径的圆.(换句话说,轨迹的中心就是大圆的圆心.)

把 $\triangle Q_1Q_2Q_3$ 的中心的坐标记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$. 众所周知,

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \bar{y}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

由于

$$x_3=9\left(\cos t_1\cos\frac{4\pi}{3}-\sin t_1\sin\frac{4\pi}{3}\right)-\cos 3\left(t_1+\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{9}{2}(-\cos t_1+\sqrt{3}\sin t_1)-\cos 3t_1,$$

所以,

$$\bar{x}=\frac{1}{3}\left(9\cos t_1-\cos 3t_1-\frac{9}{2}\cos t_1-\frac{9}{2}\sqrt{3}\sin t_1-\cos 3t_1\right.$$

$$\left.-\frac{9}{2}\cos t_1+\frac{9}{2}\sqrt{3}\sin t_1-\cos 3t_1\right)$$

$$=-\cos 3t_1.$$

类似地,

$$\bar{y}=-\sin 3t_1.$$

从 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 消去参数 t_1,得方程 $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1$. 这样,三角形的中心绕着坐标原点描出了半径为 1 的圆,并且当每个顶点跑遍曲线(*)一次时,三角形的中心描出圆 $\bar{x}^2+\bar{y}^2=1$ 三次.

17. 设 r_1、r_2 分别是圆 K_1 和 K_2 的半径. 不失一般性,可以认为 $r_2\geqslant r_1$. 设 O_1、O_2 分别是 K_1、K_2 的圆心,d 是点 O_1、O_2 之间的距离,l 是直尺的长度. 又设 AB 是圆 K_1 的直径,CD 是 K_2 的直径,l_C 是 C 点到 K_1 上任意一点的距离,l_D 是 D 点到 K_2 上任意一点的距离.

1. 设 $r_2>r_1$,$d>r_1$.

(1) 考虑两圆外离的情形(图 18). 此时, 由于

$$l_C \leqslant CA = d + r_1 - r_2,$$

$$l_D \geqslant DB = d + r_2 - r_1,$$

所以

$$d + r_2 - r_1 \leqslant l \leqslant d + r_1 - r_2.$$

这是矛盾不等式, 因为

$$d + r_1 - r_2 < d + r_2 - r_1.$$

(2) 如果两圆外切, 那末仿照上面可导致同样的矛盾.

(3) 在两圆相交且 $CB \leqslant r_1$ 时, 也产生矛盾.

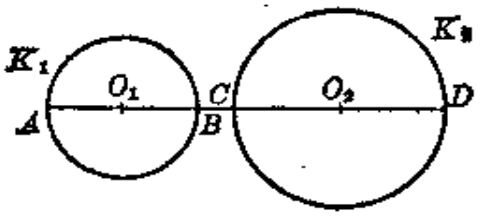


图 18

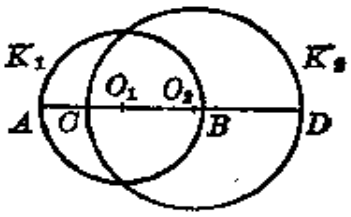


图 19

(4) 现在考虑两圆相交且 $CB > r_1$ 的情形(图 19). 我们有

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

因而

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1,$$

仍得到矛盾, 因为

$$r_2 - d + r_1 < r_2 + d - r_1.$$

(5) 当两圆内切时, 同样地产生矛盾.

(6) 一个圆在另一个圆内部时, 与情形(4)一样得到矛盾, 因为

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

从而

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

总之，若 $r_2 > r_1$，$d > r_1$，则圆 K_1 和 K_2 不可能同时用直尺的端点画出.

2. 设 $r_2 > r_1$，$d = r_1$.

(1) 两圆相交时(图 20)，不难看出，不等式

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1$$

成立，由此

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

由于 $d = r_1$，所以 $r_2 \leqslant l \leqslant r_2$，即 $l = r_2$. 但是，如果直尺的长度是 r_2，那末当它的端点之一画出圆 K_2 一次时，另一端画出圆 K_1 两次(图 20). 在这种情形，直尺的端点不可能同时画出两个圆.

(2) 在两圆内切以及内含时，情况也是类似的.

总之，若 $r_2 > r_1$，$d = r_1$，则圆 K_1 和 K_2 不可能同时用直尺的端点画出.

3. 类似于我们在 1、2 中进行的讨论可以推知，当 $r_1 = r_2$，且 $d \geqslant r_1$ 时，如果直尺的长度等于圆心距($l = d$)，那末

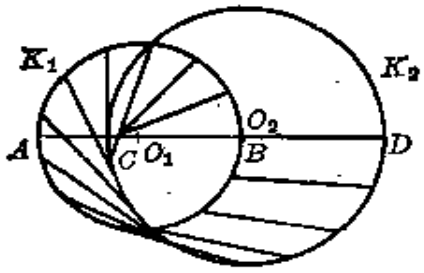


图 20

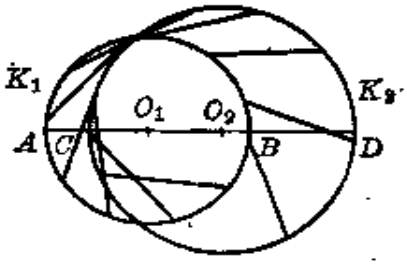


图 21

可以用直尺的端点同时作出两个圆 K_1 和 K_2. 满足这些条件的两种明显的情形，已在本题的条件里说过.

4. 设 $r_2 \geqslant r_1$, $d < r_1$.

(1) 两圆相交时(图 21)，

$$l_C \leqslant CB = r_2 - d + r_1, \quad l_D \geqslant DB = r_2 + d - r_1,$$

因此

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1.$$

这些不等式不会导致矛盾. 如果象图 21 所画的那样移动的话，可以用长度 l 满足这些不等式的直尺，同时画出两个圆 K_1 和 K_2.

(2) 两圆内含或内切时是类似的.

总之，若 $r_2 \geqslant r_1$ 且 $d < r_1$，则圆 K_1、K_2 可以用长度满足不等式

$$r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1$$

的直尺的端点同时画出.

由于 1～4 中得到的结论穷尽了所有情形，所以它们的逆命题真.

这样，直尺的端点能同时作出两个圆的充分必要条件是：

或者 $r_2 = r_1$, $d \geqslant r_1$, $l = d$,

或者 $r_2 \geqslant r_1$, $d < r_1$, $r_2 + d - r_1 \leqslant l \leqslant r_2 - d + r_1$.

18. 设 G 是满足题设条件的凸区域，而 $PQRS$ 是 G 的外切四边形中面积最小的一个(图 22).

我们首先证明，点 A、B、C、D 等分四边形 $PQRS$ 的各边. 例如，考虑 QR 边，设 $BQ < BR$. 由于在域 G 的边界上没有尖点，而且边界上每个点处有且仅有一条切线，所以当 QR (作为动边)沿域 G 的边界转动时，QR 的长度将连续地改变. 这样，在弧 CB 上充分靠近点 B 的地方，应该存在着点 M，

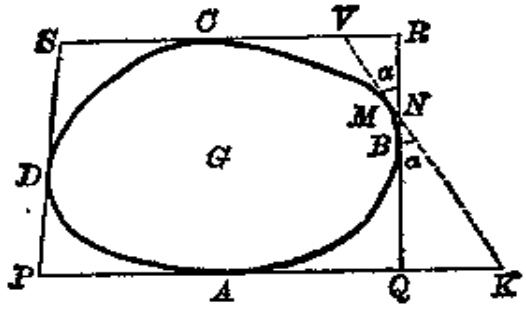


图 22

使 $MK>MV$，当然更有 $NK>NV$. 现在考虑线段 NQ. 如果有 $NQ\geqslant NR$，那末可以让点 M 充分地靠近点 B，而使 $NQ>NR$. 其次，考虑三角形 VNR 和 QNK. 由于 $\angle VNR=\angle QNK=\alpha$，所以

$$S_{\triangle QNK}=\frac{1}{2}QN\cdot NK\sin\alpha>\frac{1}{2}NR\cdot NV\sin\alpha=S_{\triangle VNR},$$

其中 $S_{\triangle QNK}$ 和 $S_{\triangle VNR}$ 是 $\triangle QNK$ 和 $\triangle VNR$ 的面积. 然而这与四边形 $PQRS$ 是 G 的最小外切四边形矛盾，从而不等式 $BQ<BR$ 不可能成立. 类似地可以证明，$BQ>BR$ 也不可能成立，因此只有 $BQ=BR$.

大家都已知道，用直线段依次连接任意四边形各边中点，将得到一个平行四边形，它的面积是原四边形的一半. 现在，图形 G 的面积小于四边形 $PQRS$ 的面积，因此平行四边形 $ABCD$ 的面积大于 $G/2$.

19. 本题结论的证明依赖于下述引理.

引理 设 AMC 是凸域 G 的一段边界弧，AC 是连结该弧上两点 A、C 得到的弦. 在以 AC 为底边，弧 AMC 上另一个点为第三个顶点的所有三角形中，以切线平行于 AC 的点 B 为第三个顶点的三角形面积最大.

证明：过点 M 作 $MN\parallel AC$，与 BC 弧交于点 N（图

23). 以 AC 为底边，第三个顶点在弧 MBN 上(但除去 M、N)的三角形的面积，大于 $\triangle AMC$ 的面积，因为第三个顶点在弧 MBN 上的三角形的高大于 $\triangle AMC$ 的高. 因而，如果平行于 AC 的直线与边界弧交于两点，那末以 AC 为底边、以交点之一为第三个顶点的三角形，在以 AC 为底边、第三个顶点在弧 ABC 上的三角形中，它的面积不可能是最大的. 但是，由引理条件可知，有最大面积的三角形是存在的，所以通过这个三角形第三个顶点的、平行于 AC 的直线，应该与这条弧有且仅有一个公共点. 根据本题条件，这条直线应在 B 处与区域 G 的边界相切.

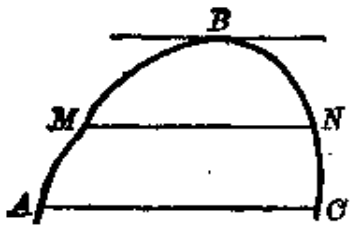


图 23

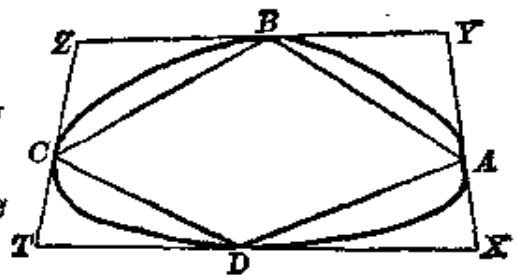


图 24

现在我们来证明本题的结论. 设 $ABCD$ 是面积最大的内接四边形(图 24)，那末在以 AC 为底边，第三个顶点在 ABC 弧上的所有三角形中，$\triangle ABC$ 面积最大. 于是，这条弧在点 B 处的切线 ZY 平行于 AC. 由此立刻推知，$ZY \parallel TX$. 类似地可证 $ZT \parallel YX$. 这样一来，平行四边形 $XYZT$ 的面积等于四边形 $ABCD$ 的面积的两倍，从而小于 $2G$，证毕.

20. 不失一般性，可以认为本题条件中所说的五边形边长是 1. 五边形的边可以当作向量研究. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$ 是五边形的一条边，而通过 $\boldsymbol{a}$ 及与它正交的向量 $\boldsymbol{b}$ 的平面与平面 $z=0$ 重合 (图 25). 那末所求的五边形的边形成的向量

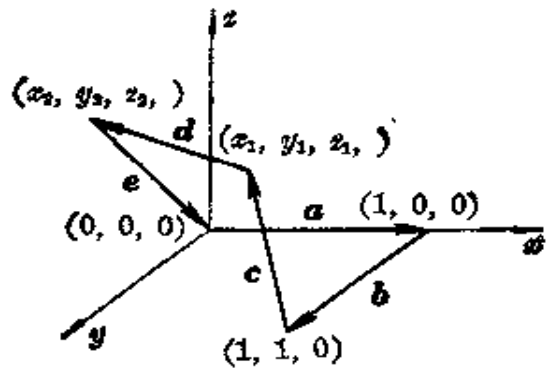


图 25

有下列坐标：

$$\boldsymbol{a}=(1,\ 0,\ 0),$$
$$\boldsymbol{b}=(0,\ 1,\ 0),$$
$$\boldsymbol{c}=(x_1-1,\ y_1-1,\ z_1)$$
$$\boldsymbol{d}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$
$$\boldsymbol{e}=(-x_2,\ -y_2,\ -z_2).$$

我们写出向量正交的条件：

(1) $(x_1-1,\ y_1-1,\ z_1)(0,\ 1,\ 0)=0$，由此 $y_1=1$；

(2) $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)(x_1-1,\ y_1-1,\ z_1)=0$；

(3) $(-x_2,\ -y_2,\ -z_2)(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)=0$；

(4) $(-x_2,\ -y_2,\ -z_2)(1,\ 0,\ 0)=0$，由此 $x_2=0$.

条件(2)和(3)可写成(利用(1)、(4)——译者)

$$-x_1^2+x_1+z_1z_2-z_1^2=0,\ y_2^2-y_2+z_2^2-z_1z_2=0. \qquad (1)$$

由于所求的五边形的边长等于1，所以

$$(x_1-1)^2+z_1^2=1,\ y_2^2+z_2^2=1, \qquad (2)$$
$$x_1^2+(y_2-1)^2+(z_2-z_1)^2=1. \qquad (3)$$

解方程组(1)、(2)得

$$x_1=1,\ y_2=0,\ z_1=1,\ z_2=1,$$

或

$$x_1=1,\ y_2=0,\ z_1=-1,\ z_2=-1.$$

这两组解都不满足方程(3)，所以在三维空间里这样的五边形不存在.

21. 在上面的问题里，提出了能否在空间里作一个各边相等，各角是直角的五边形的问题. 已经知道，它的回答是否定的. 现在这个问题是第 20 题的推广，它需要说明：是否存在各角是直角的等边"奇数边形"，如果存在，是什么样的. 原来，当 $n=4, 5, 6, \cdots$ 时，在三维空间里存在着带直角的等边 $2n-1$ 边形，即等边直角七边形，九边形等等. 由于在三维空间里，当 $n=2, 3, 4, \cdots$ 时，等边直角的 $2n$ 边形明显是存在的①，所以可以说，从 $n=4$ 开始，除五边形外，在三维空间里存在着所有等边直角 n 边形.

如果我们能证明，在三维空间里不能作出等边直角的"奇数边形"，或者至少作出一个这类的多边形，那末问题就解决了. 从第 20 题的解已经知道，不存在这一类五边形. 显然，三角形也不具有这种性质. 我们证明，存在着等边的七边形，它的所有的角都是直角.

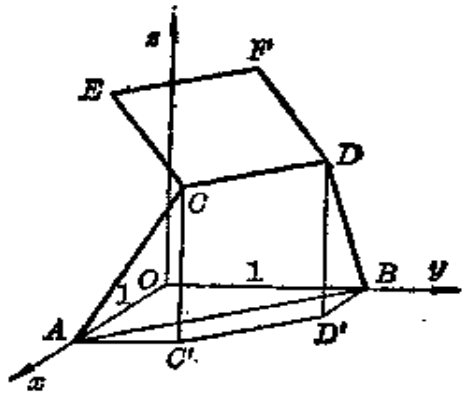


图 26

在空间里引进直角坐标系(图 26). 在 OX 轴和 OY 轴上截取线段 $OA=OB=1$，并作为七边形的边. 在过点 A 平行于平面 YOZ 的平面内，从点 A 出发截取单位长的线段 AC，从点 B 出发，在平行于平面 XOZ 的平面内取单位线段 BD，使 $\angle CAC' = \angle DBD'$，$C'D'=CD=1$. 现在，在梯形 $ABDC$ 所在的平面内作正方形

① 参见本题末从七边形得到九边形的方法，可以从正方形得到等边直角空间 $2n$ 边形. ——译者

$CDef$ (图 27). 显然，角 ACf(等于角 BDe) 是锐角，而角 ACf' (等于角 BDe') 是钝角. 因此，把正方形 $CDef$ 在空间里绕 CD 边转动时，我们可以找到这样的位置 $CDFE$ (图 26)，使 $\angle ACE=\angle BDE=90°$.

从作法可知，$ACEFDBO$ 是满足题设条件的七边形.

现在已经不难作出带直角的等边九边形. 为此，只要在垂直于 $CEFD$(图 26)的平面里作正方形 $EFGH$，把它的一条边 EF 抹去. 图形 $ACEHGFDBO$ 就是所求的带直角的等边九边形. 继续在前一个图形的最后一个正方形的垂直平面里作正方形，我们将逐个得到全部直角等边的“奇数边形”.

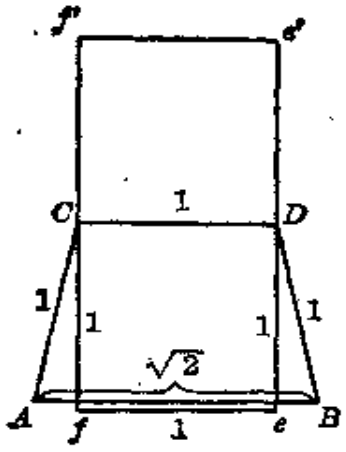


图 27

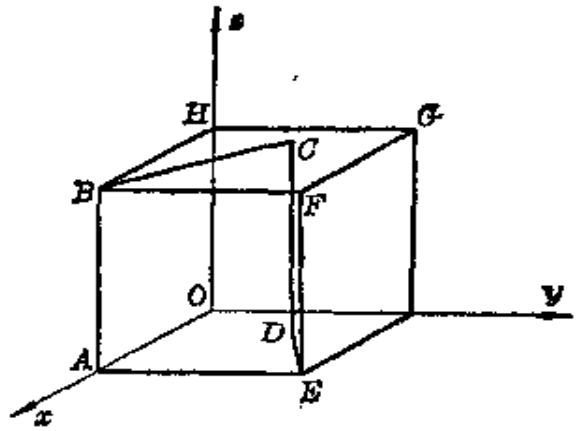


图 28

注　带直角的等边九角形也容易直接作出，无需通过作七边形. 事实上，考虑顶点为(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)的单位立方体(图 28). 在它的界面上取点

$$C=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)\quad 和\quad D\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),$$

那末

$$BC=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}-1\right)^2+\frac{1}{4}}=1,\quad DE=1.$$

22. 这个问题和第 16 题一样，是汪克尔发动机的几何理论引起的. 但不难知道，本题要作的是固定宽度的曲线. 这个主题在一些文献中屡次考虑过，因此我们不再解答①.

23. 质量等于 BC 边长的质点 A 和质量等于 AB 边长的质点 C，它们的重心 D 在 AC 边上，并且把它分成满足关系式 $AD:DC=AB:BC$ 的两条线段 AD 和 DC. 因此，BD 是角 B 的平分线. 三个质点 A、B、C 形成的质点系的重心，就是两个质点 B、D 的系统的重心，它在角平分线 BD 上. 同理；质点系 A、B、C 的重心在角 A 和角 C 的平分线上，因此与 $\triangle ABC$ 三个内角平分线的交点(即内心)重合.

24. 设有界图形 F 至少有两个外接圆，也就是说，在包含 F 的所有的圆中，有两个半径最小的圆(它们的半径是一样的). 我们把一个圆记为 $K_1(O_1)$，另一个记为 $K_2(O_2)$. 因为它们都包含 F，所以它们的相交部分也包含 F. 考虑以线段 O_1O_2 的中点 O 为圆心，通过点 A、B 的圆(图 29)，这里 A、B 是 K_1 和 K_2 的交点. 这个圆包含 K_1 和 K_2 的相交部分，因而包含图形 F，但它的半径 r 小于圆 K_1 和 K_2 的半径 R. 事实上，若 $d=\frac{1}{2}O_1O_2$，则 $r=OA=$

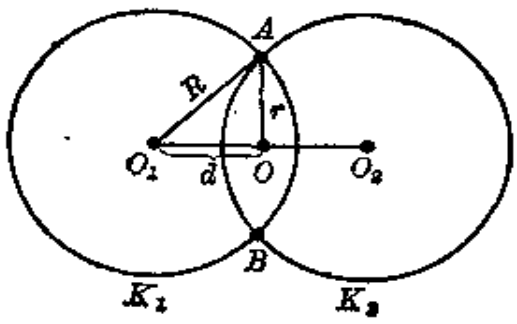


图 29

① 例如，参见《数学万花镜》第 54 节(裘光明译，中国青年出版社 1953 年版)，该书图 64 所画的曲线就是满足本题条件的曲线中的一条。——译者

$\sqrt{R^2-d^2}$, 故 $r<R$. 这与 R 是包含 F 的最小圆的半径矛盾.

25. 这个问题的回答是肯定的. 为了证明, 我们考虑两种情况.

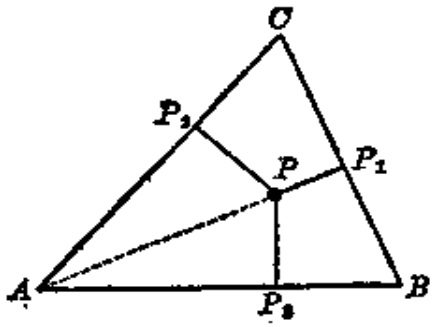


图 30

(1) 锐角三角形 ABC 是等腰的.

例如, 设 $AB=AC=b$.

在 $\angle BAC$ 的平分线上, 截取长 $b/\sqrt{3}$ 的线段 AP, 过 P 点作此三角形各边的垂线(图 30). 设 P_1, P_2, P_3 是它们的垂足.

点 P 在 $\triangle ABC$ 内. 这可由

$$AP=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad AP_1=b\cos\frac{A}{2}$$

得知. 事实上, 因为 $\angle A<90°$, 所以

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45°<\cos\frac{A}{2}.$$

从而

$$AP_1>\frac{b}{\sqrt{2}},\quad AP<AP_1.$$

四边形 AP_2PP_3, BP_3PP_1 和 CP_1PP_2 的面积是相等的. 事实上,

$$S_{AP_2PP_3}=AP\sin\frac{A}{2}\cdot AP\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}AP^2\sin A$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}b^2\sin A\right)=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

类似地可计算另两个四边形的面积$\left(\text{都等于}\frac{1}{3}S_{ABC}\right)$.

(2) 锐角三角形 ABC 不是等腰的.

不失一般性, 可设它的三个角满足 $A<B<C$.

引进直角坐标系，并且这样地放置 $\triangle ABC$：它的顶点 A 与坐标原点重合，x 轴是角 A 的平分线，顶点 B 在第一象限 $x>0$，$y>0$（图 31）．设 $P(x, y)$ 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，P_1、P_2、P_3 是 P 到边 BC、CA、AB 的垂足．认为角是有向的，我们得到

$$\angle DAB=\frac{A}{2},$$

$$\angle DAC=-\frac{A}{2}.$$

其次，设 $AP=r$（从坐标原点到点 P 的向径的长度），$\angle DAP=\theta$，那末

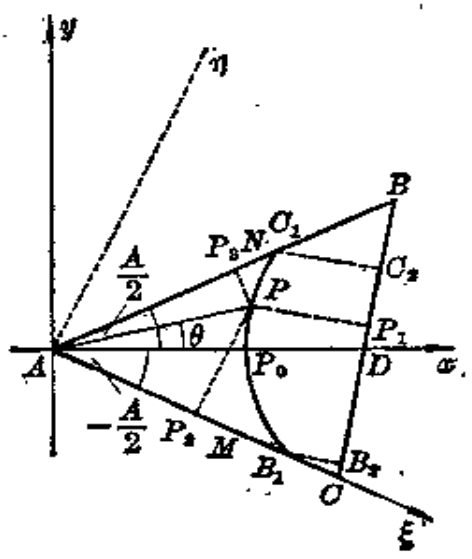


图 31

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta.$$

我们计算四边形 AP_2PP_3 的面积：

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{A}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\theta\right)\\&\quad+\frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{A}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}+\theta\right)\\&=\frac{1}{4}r^2[\sin(A-2\theta)+\sin(A+2\theta)],\end{aligned}$$

由此

$$p=\frac{1}{2}r^2\sin A\cos 2\theta,\qquad(1)$$

或

$$p=\frac{1}{2}r^2\sin A(\cos^2\theta-\sin^2\theta).$$

以 $r\cos\theta=x$，$r\sin\theta=y$ 代入，最后得

$$p=\frac{\sin A}{2}(x^2-y^2).\qquad(2)$$

$\triangle ABC$ 的面积按

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \tag{3}$$

计算，这里 $AC=b$，$AB=c$.

按题设有 $p=\frac{1}{3}S_{ABC}$，从(1)和(3)式得

$$r=r(\theta)=\sqrt{\frac{bc}{3\cos 2\theta}}. \tag{4}$$

从(2)和(3)式得

$$x^2-y^2=\frac{2p}{\sin A}=\frac{2}{\sin A}\cdot\frac{bc\sin A}{6},$$

因此

$$x^2-y^2=\frac{bc}{3}. \tag{5}$$

这样，点 p 在由方程(5)确定的等轴双曲线的弧 $B_1P_0C_1$ 上(图 31).

现在证明，点 B_1 在点 M(线段 AC 的中点)和 C 之间，点 C_1 在点 N(线段 AB 的中点)和 B 之间，从而 $\triangle CB_1B_2$ 和 $\triangle BC_1C_2$ 的面积都小于 $\frac{1}{4}S_{ABC}$.

事实上，在锐角三角形 ABC 内，从不等式 $A<B<C$ 可得

$$BC<AC,\quad \cos B<\cos A,$$

$$BC\cos B<AC\cos A.$$

于是

$$AC\cos A+BC\cos B<2AC\cos A.$$

因此

$$AB=AC\cos A+BC\cos B<2AC\cos A.$$

或

$$c<2AC\cos A.$$

由此 $$\frac{bc}{3\cos A}<\frac{2AC^2}{3}<AC^2,$$

$$\sqrt{\frac{bc}{3\cos A}}<AC.$$

应用(4)式(取 $2\theta=-A$)得

$$AB_1<AC, \tag{6}$$

由此及 $AB_1=AC_1$[见(4)式], $AC<AB$, 得

$$AC_1<AB. \tag{7}$$

因为 $$AB\cos A<AC,$$

当然更有 $$AB\cos A<\frac{4}{3}AC,$$

所以 $$\frac{AB}{4}<\frac{AC}{3\cos A}.$$

上式两边乘以 AB, 得

$$\frac{AB^2}{4}<\frac{AC\cdot AB}{3\cos A}=\frac{bc}{3\cos A},$$

所以 $$AN=\frac{AB}{2}<\sqrt{\frac{bc}{3\cos A}}=AC_1,$$

即

$$AN<AC_1. \tag{8}$$

而由于 $AC_1=AB_1$, $AM=\frac{AC}{2}<\frac{AB}{2}=AN$,

所以

$$AM<AB_1. \tag{9}$$

从不等式(6)、(9)得知, $AM<AB_1<AC$, 而由不等式(8)和(7)可得, $AN<AC_1<AB$. 这样, B_1 点在 M 和 C 之间, C_1 点在 N 和 B 之间.

现在引进新的坐标系 $\xi A\eta$(使 AC 在 ξ 轴上), 那末

$$\xi = r\cos\left(\theta+\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{bc}{3}\cdot\frac{\cos^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{bc}{3}}\,u,$$

$$\eta = r\sin\left(\theta+\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{bc}{3}\cdot\frac{\sin^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{bc}{3}}\,v,$$

其中

$$u = u(\theta) = \frac{\cos^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta},\quad v = v(\theta) = \frac{\sin^2\left(\theta+\frac{A}{2}\right)}{\cos 2\theta}.$$

关于 θ 微分 $u(\theta)$ 和 $v(\theta)$ 得

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-2\sin\left(\frac{A}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}+\theta\right)}{\cos^2 2\theta},$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{2\sin\left(\frac{A}{2}+\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}-\theta\right)}{\cos^2 2\theta}.$$

这样，在扇形 $-A/2<\theta<A/2(0<A<\pi/2)$ 中，$du/d\theta<0$, $dv/d\theta>0$. 因而，线段 AP_2 的长度 $\xi(\theta)$，当 θ 从 $-A/2$ 变到 $A/2$ 时递减，而线段 PP_2 的长度 $\eta(\theta)$ 递增. 由此，四边形 CP_2PP_1 的面积 F 是变量 θ 在区间 $[-A/2, A/2]$ 中的递增函数. 同时，在同一区间里，四边形 CP_2PP_1 是 θ 的连续函数. 根据闭区间上连续函数的著名性质，它取得最小值

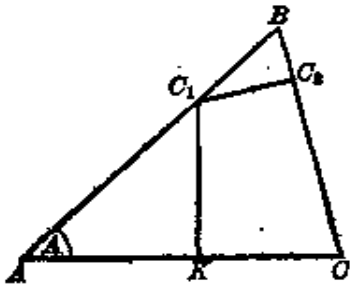


图 32

$$F\left(-\frac{A}{2}\right) = S_{CB_1B_2} < \frac{1}{4}S_{ABC}$$

和最大值

$$F\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2}{3}S_{ABC}-S_{BC_1C},$$

之间的一切值. 若 P 与 C_1 重合(图 32),则

$$S_{KC_1A}=\frac{1}{2}AC_1^2\sin A\cos A=\frac{1}{2}\frac{bc}{3\cos A}\sin A\cos A$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

由此可得

$$F\left(\frac{A}{2}\right)>\frac{2}{3}S_{ABC}-\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{5}{12}S_{ABC}>\frac{1}{3}S_{ABC}.$$

这样一来,对 θ 的某个值 $\theta^*\left(-\frac{A}{2}<\theta^*<\frac{A}{2}\right)$,四边形 CP_2PP_1 的面积等于 $\frac{1}{3}S_{ABC}$. 证毕.

26. 不难证明,每个有界平面点集,都恰好有一个包含这个集的最小的圆. 如果这个集是闭集,那末在这个圆上或者有该集的两个点,它们与该圆的一条直径的端点重合,或者有该集的三个点,它们是某个锐角三角形的三个顶点*.

特别地,由此可得

引理 1 包含平面上三点 A、B、C 的最小圆的半径等于:

(1) $\triangle ABC$ 的最大边的一半,如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形;

(2) $\triangle ABC$ 的外接圆半径,如果 $\triangle ABC$ 是锐角三角形.

这两种情况相互间不排斥,因为直角三角形的外接圆半径等于斜边长的一半.

包含平面点集 S 的最小圆的半径用符号 $r(S)$ 表示.

引理 2 如果点 A'、B'、C' 之间的距离小于点 A、B、C 之间的相应距离,那末 $r(A', B', C')<r(A, B, C)$.

证：只要考虑三种情形：

1．$\triangle A'B'C'$ 是钝角三角形．此时，由引理 1

$$r(A',\ B',\ C')=\max\left(\frac{A'B'}{2},\ \frac{B'C'}{2},\ \frac{C'A'}{2}\right)$$

$$<\max\left(\frac{AB}{2},\ \frac{BC}{2},\ \frac{CA}{2}\right)$$

$$\leqslant r(A,\ B,\ C).$$

2．$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 都不是钝角三角形．由于 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的内角和相同，所以 $\triangle A'B'C'$ 至少有一个角不小于 $\triangle ABC$ 的对应角．例如设 $\angle A'\geqslant\angle A$．由引理 1，包含 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle ABC$ 顶点的最小圆的半径，等于外接圆的半径．利用正弦定理（$BC>B'C'$，$\sin A\leqslant\sin A'$），得

$$r(A',\ B',\ C')=\frac{B'C'}{2\sin A'}<\frac{BC}{2\sin A}=r(A,\ B,\ C).$$

3．$\triangle A'B'C'$ 不是钝角三角形，$\triangle ABC$ 是钝角三角形．设 AB 是 $\triangle ABC$ 的最大边，由于 $\triangle ABC$ 是钝角的，所以 $AB^2>BC^2+CA^2$．考虑辅助直角三角形 $A_1B_1C_1$，它的边是 $B_1C_1=BC$，$C_1A_1=CA$，$A_1B_1=\sqrt{BC^2+CA^2}$．

从不等式 $A_1B_1<AB$ 和引理 1，得

$$r(A_1,\ B_1,\ C_1)=\frac{A_1B_1}{2}<\frac{AB}{2}=r(A,\ B,\ C).\qquad(*)$$

$\triangle A'B'C'$ 不是钝角的，因而，$A'B'^2\leqslant B'C'^2+C'A'^2$．根据原来的假设（即不等式 $B'C'<BC$，$C'A'<CA$）和辅助三角形 $A_1B_1C_1$ 的作法，它的边满足 $A'B'<A_1B_1$，$B'C'<B_1C_1$，$C'A'<C_1A_1$．对 $\triangle A'B'C'$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 应用本引理的情形 2，得

$$r(A',\ B',\ C')<r(A_1,\ B_1,\ C_1),$$

由此，用不等式（*）得

$$r(A',\ B',\ C')<r(A,\ B,\ C).$$

引理 2 证毕.

引理 3 如果某个点集 S 的任意三个点含于半径为 r 的圆内，那末整个集 S 也含于半径为 r 的某个圆内.

引理 3 可从下述海莱定理得到：

若有限或无限个平面凸有界图形中，每三个有公共点，则存在一点，它同时属于所有图形.

证 考虑以集 S 的点为心，r 为半径的所有圆之集 K. 由于集 S 的任意三个点都含于半径为 r 的圆内，所以 K 的任何三个圆都有公共点. 由海莱定理得知，存在点 X 属于 K 的所有圆. 以 X 为圆心，r 为半径的圆内就包含了整个集 S. 证毕.

现在考虑两个平面点集 $S=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 和 $T=\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，并且对 $i, j=1, \cdots, n$, $i\neq j$ 有 $A_iA_j>B_iB_j$.

很明显，当 $n=2$ 时，不等式 $r(T)<r(S)$ 成立.

设 $n\geqslant 3$. 由引理 3，内部包含集 T 的最小圆的半径是数 $r(B_i, B_j, B_k)$ $(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$ 中最大的. 例如，设 $r(T)=r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0})$.

由引理 2，

$$r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0})<r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0}),$$

由此式及明显的不等式

$$r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0})\leqslant r(S)$$

得

$$r(T)<r(S).$$

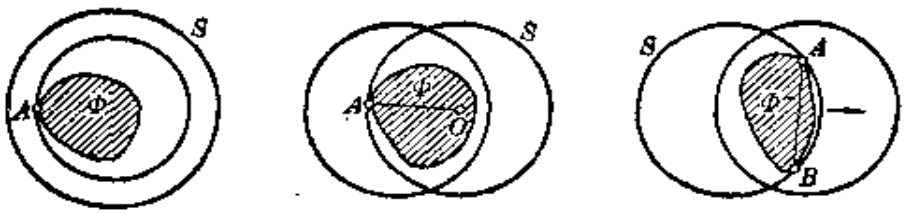
证毕.

注 用类似的方法也可证明下述定理：若平面有界闭集 S，在某个压缩变换作用下变换为集 T，则 $r(T)<r(S)$.

*仿第 24 题容易证明本段的第一句话. 下面证明这一段

的后一句话(摘自 И. М. Яглом 等著 «Выпуклые Фигуры» 第 246～247 页).

情形 1. 如果包含平面图形 Φ 的圆 S 上没有 Φ 的点，那末有比 S 小的圆包含 Φ. 事实上，只要缩小 S 的半径(圆心不变)，直至接触到 Φ 的某个边界点 A 为止，就得到了这样的圆(下图左).



情形 2. 如果 S 上只有 Φ 的一个边界点 A，那末也有更小的圆包含 Φ. 事实上，把 S 沿半径 OA 方向稍移动一下，就化为情形 1(上图中).

情形 3. 如果 S 上有 Φ 的两个边界点 A、B，但它们不是 S 的直径的端点，并且 S 的优弧 AB 上没有 Φ 的其它点(上图右)，那末也有更小的圆包含 Φ. 事实上，把 S 沿垂直于 AB 弦的方向移动一下，仍化为情形 1.

综上所述，包含 Φ 的最小的圆，具有所要求的性质.

——译者

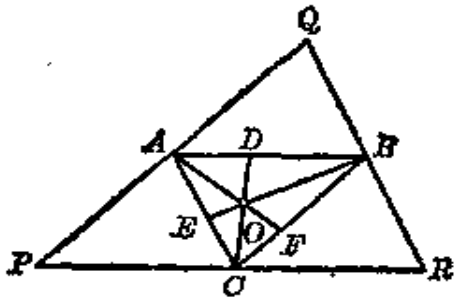


图 33

27. $\triangle PQR$ 各边的重心在它们的几何中心处，即分别与小三角形 ABC 的顶点之一重合(图 33). 因而，整个铁丝三角形 PQR 的重心，与质点系 A、B、C 的重心一致，质点的质量同边长 PQ、QR、RP 成正比例.

两个质点 A、B 形成的系统的重心 D，把线段 AB 分成与集中于 A、B 处的质量成反比的两段：

$$\frac{AD}{DB}=\frac{QR}{PQ}=\frac{AC}{CB}.$$

我们知道，过三角形顶点，并把对边分成与另两边长度成比例线段的直线，是顶角的平分线．因而，质点系 A、B、C 的重心——它同时是质点系 C、D 的重心——在 $\angle C$ 的平分线 CD 上．类似地，质点系 A、B、C 的重心，也应该在小三角形的另两条角平分线 AF 和 BE 上．

注 由于 $\triangle ABC$ 的边与 $\triangle PQR$ 的边成比例，而附在点 A、B、C 处的质量与边 QR、RP 和 PQ 的长度成正比，所以，可以应用已在第 23 题证明过的结论：质点系 A、B、C 的重心与 $\triangle ABC$ 的内心重合．从这一结论立即可以推得本题的结论．

28．数 $b_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 应满足的充要条件，可表示为不等式组 $\sum\limits_{i\neq k} b_i > b_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 或等价的不等式组 $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k > 2b_{\max}$，这里 $b_{\max}$ 表示 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 中最大的一个．

29．问题的回答是否定的．以 b_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 为边的 n 边形的最大面积与边的次序无关．事实上，如图 34，对换边 b_i 和 b_{i+1} 不改变多边形的面积．而通过这样的对换（交换相邻两边）可以把边 b_1, b_2, $\cdots$, b_n 排列成任何次序．

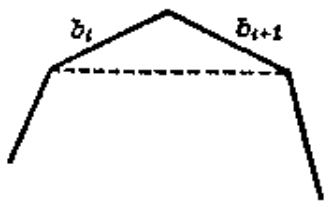


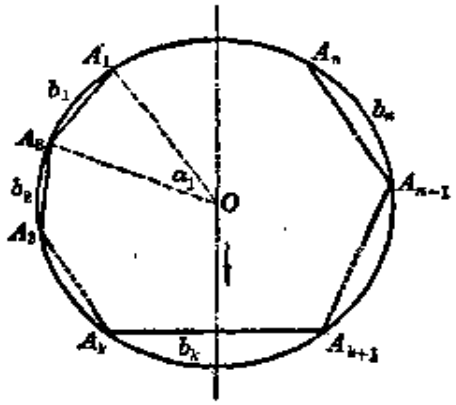
图 34

30．本题的完整证明见 Д. А. Крыжановский 著 «Изопериметры» 一书第 52～55 页．

〔该书译者未见到，以下是另一证明．

设 $b_k=\max(b_1, \cdots, b_n)$．

作半径充分大的圆．在该圆上依次(向一个方向)截取长为 $b_1, \cdots, b_n$ 的弦，则当半径 r 充分大时，折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 不闭合，各弦所对的圆心角的和(见左图)



$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n<2\pi.$$

令 $r\to b_k/2$．(例如可让圆心 O 在弦 b_k 的垂直平分线上向 b_k 移动)，则当 $r=b_k/2$ 时可有两种情况发生：

(1) 折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 闭合，

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_n\geqslant 2\pi.$$

此时，由于

$$f(r)=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\sum_i 2\arcsin\frac{b_i}{2r}$$

是 r 的连续函数，根据中间值定理，存在 r_0，使

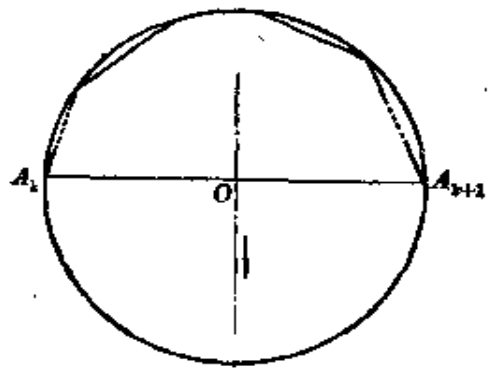
$$f(r_0)=2\pi.$$

这说明与此相应的 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 是所求的内接 n 边形．

(2) 折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 不闭合，即仍有

$$f(r)<2\pi,$$

$$\left(r=\frac{b_k}{2}\right).$$



此时，仍让圆心 O 沿原来的方向移动，即令 $r\to\infty$ (注意，在此过程中折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 落在半圆内)．(见右图)

弧 b_k 所对的劣弧长

$$l(r)=r\alpha_k=2r\arcsin\frac{b_k}{2r}.$$

它的极限

$$\lim_{r\to\infty}2r\arcsin\frac{b_k}{2r}=b_k. \qquad (*)$$

由于 $b_1,\cdots,b_n$ 形成 n 边形，从第 28 题应有

$$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>b_k.$$

设 b 满足

$$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>b>b_k.$$

由(*)式，当 r 充分大时应有

$$l(r)<b.$$

即 $$b_1+\cdots+b_{k-1}+b_{k+1}+\cdots+b_n>l(r).$$

这说明 r 充分大时折线 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 必闭合，从而同情形(1)讨论可知，存在要求的圆内接 n 边形. ——译者〕

31. 见下题的解.

32. 第 31 和第 32 题形成一个整体，因此它们的解答也可以合起来一起考虑.

我们先证明，用 n 个圆至多把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分.

用归纳法证明. 当 $n=1$ 时结论是真的：一个圆把平面分成两部分.

设 P_n 表示用 n 个圆把平面分成的最多部分数，并且设 $P_n\leqslant n(n-1)+2$.

现在作第 $n+1$ 个圆. 它可以与其它的圆交于 s 个点，这里 $0\leqslant s\leqslant 2n$.

当 $s>0$ 时，这 s 个点把第 $n+1$ 个圆分成 s 段弧. 每一段弧连接平面的两部分. 因而每一段这样的弧，最多产生平面的一个新的部分，s 的最大值 $s=2n$，给出 $2n$ 个新部分.

利用归纳假设得

$$P_{n+1}\leqslant P_n+2n\leqslant n(n-1)+2+2n$$

$$=n^2+n+2=(n+1)n+2.$$

这就完成了本题第一部分的证明.

从这个证明可知，4 个圆至多把平面分成 14 部分. 因此不管如何分布四个圆，都不能把平面分成 16 部分.

现在证明，半径相同的 n 个圆，可以把平面分成 $n(n-1)+2$ 部分. 为此，考虑单位线段 AB. 把它用点 A_1, A_2, A_3, …, A_{n-2} 分成 $n-1$ 等分. 以点 A, A_1, …, A_{n-2}, B 为圆心，$\frac{1}{2}$ 为半径作 n 个圆，我们得到一个圆族，其中任何两个圆都相交，因为它们的圆心距小于半径之和. 不难证明，在任何一点都不会有两个以上的圆相交. 因而，作为这个圆族中两圆交点的点，总共有 $2C_n^2=n(n-1)$ 个，并且在每个圆上有 $2(n-1)$ 个这样的点. 这些交点把各个圆分成 $2(n-1)$ 段弧，把整个圆族分成 $2n(n-1)$ 段弧. 根据欧拉公式，弧的段数等于交点个数与平面被分成的部分数的和减 2，所以所求的部分数等于

$$2n(n-1)-n(n-1)+2=n(n-1)+2.$$

证毕.

33. 由于对每个非凸多边形可以作一个各边相等而面积较大的凸多边形，所以只要对凸六边形证明这个问题.

我们知道，在周长相同的凸多边形中，正多边形有最大面积. 因此，如果 S 是边长小于 1 的任意凸多边形的面积，那末 $S<3\sqrt{3}/2$，此式右边的数是边长为 1 的正凸六边形的面积. 不难知道，$\frac{3}{2}\sqrt{3}<\frac{3}{2}\times 1.732=2.598<2.6$. 因而

$S<2.6$. 证毕.

34. 首先注意到，内部有 n 个已知点的卵形本身，实际上不起任何作用，因为平面上任取的 n 个点，总可以包含在某个卵形内. 如果不考虑限制 n 个已知点的卵形，那末原先与卵形有公共点的折线用射线代替.

为简单起见，采用下述记号. 设 $Y1$ 是问题的第 1 个条件，它说，在每个多边形部分的内部，只有 n 个已知点中的一个；$Y2$ 是问题的第二个条件，这个条件说，任何一部分的主人，到"自己的"点比到"别人的"点近.

在着手解决这个问题之前，先考虑两种特殊情况：

(1) $n=1$. 此时 $L(1)=0$. 事实上，如果 $n=1$ 时，L 的值大于 0，那末违背条件 $Y1$.

(2) $n=2$. 此时 $L(2)=1$. 事实上，线段 P_1P_2 的垂直平分线形成的篱笆满足条件 $Y2$. (我们假定，各部分的主人都是不爬篱笆的庄重的人.) 因此，$L(2)\geqslant 1$. 再排一条既不违反 $Y1$，又不违反 $Y2$ 的篱笆是不可能的，因而 $L(2)=1$.

现在证明，各部分之间的边界有下列性质：

(1) 折线的各节(它们可以是有限的线段，也可以是半无限的射线)在 $P_iP_k(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq k)$ 的垂直平分线上.

(2) 在任一线段 P_iP_k 的垂直平分线上，只能有折线网络的一节.

证明性质(1). 设内部包含点 P_i 的篱笆，有一节不在任何一条线段 $P_iP_k(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq k)$ 的垂直平分线上. 如果在篱笆这一节的旁边有某个已知点 P，显然违反条件 $Y2$，如果在这一节旁边一个已知点都没有，那末又违反条件 $Y1$. 这样，性质(1)得证.

证明性质(2)。 设在 P_iP_k 的垂直平分线上，至少有折线网络的两节．由于它们分布在一直线上，所以应该用顶点(图35)或某个折线网络(图36)分开。

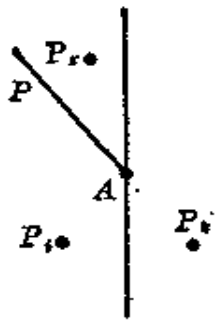


图 35

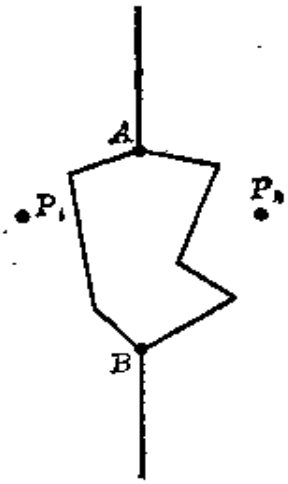


图 36

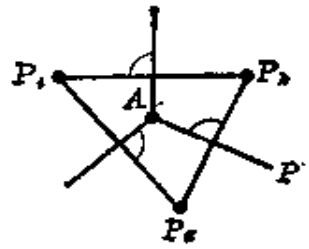


图 37

第一种情形，这个折线网络至少应该还有一节 p 从顶点 A 出发．因此，包含某点 P_x 的部分与顶点 A 连接，如果 S 是 P_iP_k 的中垂线，那末它不能同时是 $P_xP_k(x\neq i)$ 的中垂线．同时，如果在与顶点 A 连接的各部分中，有一部分没有任何已知点，那末违背条件 $Y1$.

第二种情形，设折线网络的某一节 p 从顶点 A 出发(图37)．这一节旁边应有包含已知点之一(记为 P_x)的部分．点 P_x 唯一地确定点 P_i、P_k 的位置，因而也唯一地确定从 A 点出发的折线网络另一节的位置．对 B 点进行类似的讨论，可以找到点 P'_x, P'_i, P'_k, 并且 $P'_i=P_i$, $P'_k=P_k$, 但 $P'_x\neq P_x$. P'_xP_i 和 P'_xP_k 的垂直平分线应该交于 B 点，但这是不可能的，因为有公共始点的两条线段的对称轴，或者平行，或者交于这两条线段所成的凸角内．如果折线网络的结点连接三个以上的部

分(图 38)，仿上讨论，同样导致矛盾．这样，性质(2)得证．

现在考虑按本题条件分隔的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的任意构形①．篱笆(在平面中)形成某个平面图形 G．我们用下述方法作对偶于图形 G 的图形 G^*：在每一部分(包括无界部分)任取一点，例如点 P(显然，这样的点恰好有 n 个)；如果点 P_i 和 P_k 所属的部分是邻接的，那末把这两个点连接起来(这样得到图形 G^* 的连接顶点 P_i 和 P_k 的边)．由性质(2)，任何一对点 P 至多只能用一条边连接．所作的图形 G^* 与 G 一样是平面的，而它的边数等于折线网络的节数(即图形 G 的边数)．这就有了问题：如果每一对顶点至多以一条边连接，有 n 个顶点的平面图形，它的最大边数等于什么？利用图 39，不难计算，$n\geqslant 3$ 时，具有所求性质的图形，至多有 $3(n-2)$ 条边．由于计算的结果与图形的画法无关，而仅由它的拓扑性质确定，我们得到不等式：

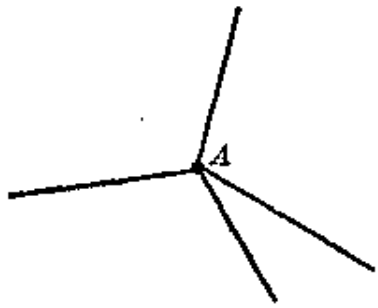


图 38

$$L(n)\leqslant 3(n-2).$$

我们证明，$n\geqslant 3$ 时，上述不等式实际上成为等式 $L(n)=3(n-2)$．为此只要证明，对任意的 $n\geqslant 3$，可以找到 n 个点的这样的构形，使折线网络的节数等于 $3(n-2)$．我们举出这种构形的例子．

把从公共顶点 O 出发的、把平面分成彼此邻接的六部分

① (平面)构形是由平面上的点和直线这样地构成的图形：每个点结合相同条数的直线，每条直线结合相同个数的点．关于构形和下文讲到的对偶图形及第 82 题提到的对偶性原理，可参见 D. 希尔伯特、S. 康福森著《直观几何》上册(王联芳译，江泽涵校订，人民教育出版社)第 97，119，94 页．——译者

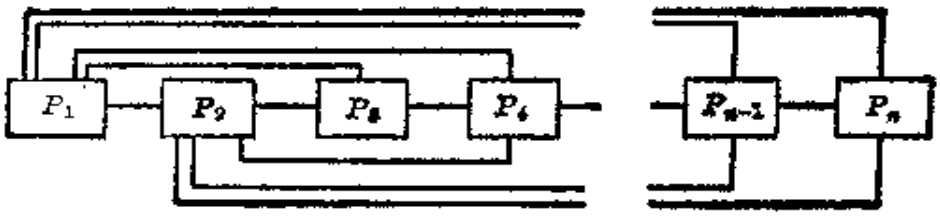


图 39

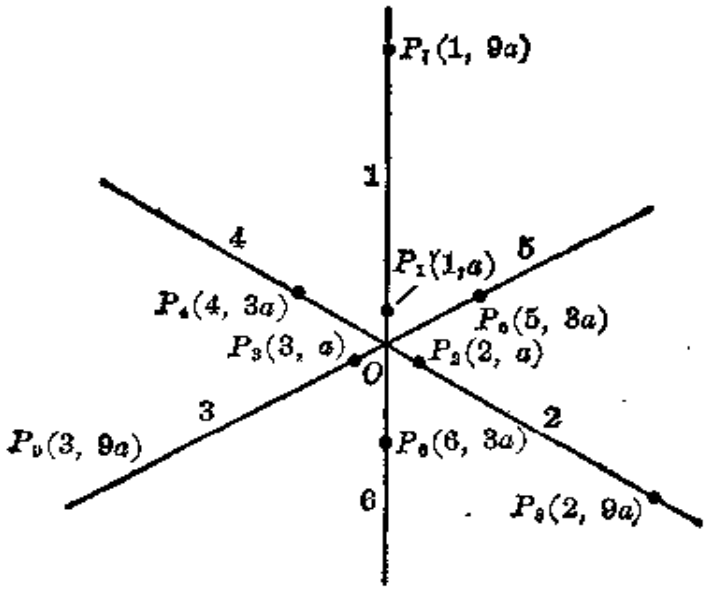


图 40

的六条射线，如图 40 所示那样编号. 我们以 $P(m, a)$ 表示第 m 条射线上，距顶点 O 的距离为 a 的点 P. 当 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ 时，点

$$\begin{cases} P_1(1, a), & P_2(2, a), & P_3(3, a), \\ P_4(4, 3a), & P_5(5, 3a), & P_6(6, 3a), \\ P_7(1, 9a), & P_8(2, 9a), & P_9(3, 9a), \\ P_{10}(4, 27a), & P_{11}(5, 27a), & P_{12}(6, 27a), \\ P_{13}(1, 81a), & \cdots \end{cases} \tag{1}$$

形成了我们所需要的构形.

当 $n\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$ 时，点 P_n 放在星形的中心处（即射线的公共顶点处——译者）. 为符号一致起见，把点 P_n 的坐标看作 $(x+1,\ 0)$，其中 x 是点 P_{n-1} 所属的射线的号码.

当 $n\equiv2(\mathrm{mod}\,3)$ 时，点 P_{n-1} 放在星形的中心处，而点 P_n 按法则(1)放置.

我们解释图 41. 设 $n>12$. 在 $n\equiv0(\mathrm{mod}\,3)$ 时，折线节先形成（如果从星形中心起算）三个五边形，然后又形成与前三个相似的三个五边形（相似系数等于 3），$n-12$ 个相似六边形（相似系数 3, 9, 27 等等），然后又是三个有限的五边形，最后是三个无界的五边形. 这样一来，这个构形里折线网络的总节数

$$N=\frac{1}{2}[3.5+3.5+6(n-12)+3.5+3.5]=3(n-2).$$

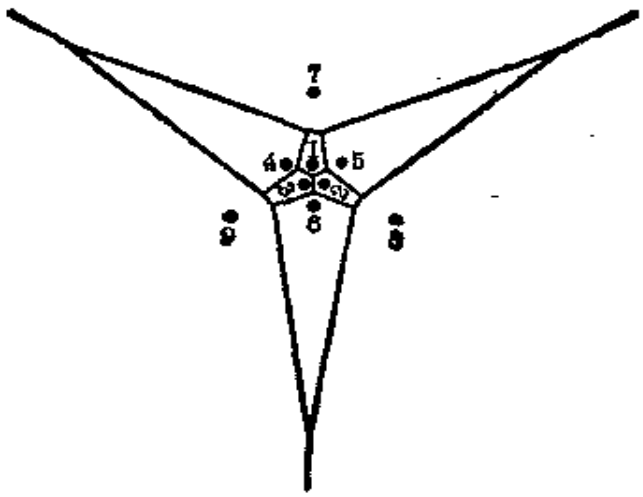


图 41

当 $n\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$ 和 $n\equiv2(\mathrm{mod}\,3)$ 时，得到的图形不需要独立画出. 因为不难看出，在星形中心添加一个新的点，只引起图形中心部分的变化，最靠近中心的五边形变为六边形，中心附近产生一个等边三角形. 如此，在星形中心添加一个点

时，折线网络的节数增加 3. 再添加一个点（图 43），也只引起图形中心部分的变化——使折线网络的节数增加 3（比较图 41、42、43，如何从图 41 得到 42 和 43 是明显的）. 连接已知点的线段可以划分为一列线段族：

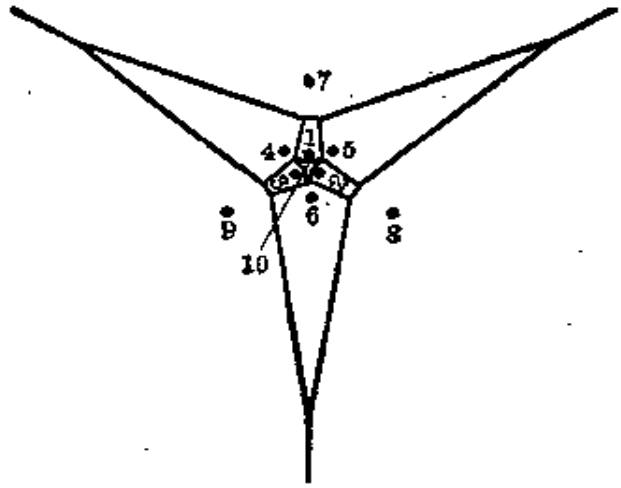


图 42

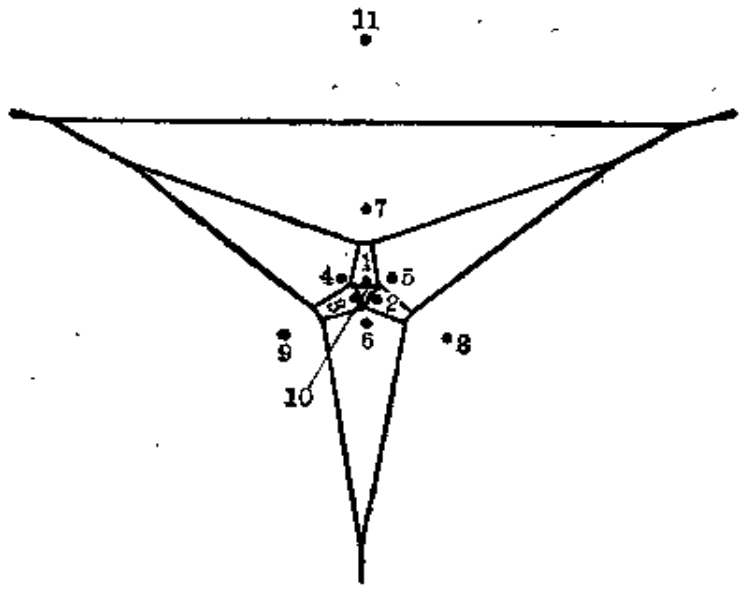


图 43

$$P_1P_4 /\!/ P_7P_{10} /\!/ P_{13}P_{16} \text{ 等等},$$

$$P_4P_7 /\!/ P_{10}P_{13} /\!/ P_{16}P_{19} \text{ 等等},$$

以及类似的端点在其它各对射线上的线段族. 把这些线段族都写出来，便可知道各部分的相似性(我们已对 $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3)$ 时的构形，说过这种相似性)，以及图形作法的可实现性. 当 $n\leqslant 12$ 时不难直接进行考察.

这样，我们证明了，$L(1)=0$, $L(2)=1$, 以及 $n\geqslant 3$ 时，$L(n)=3(n-2)$.

35. 这 23 个点把该圆分成 23 条弧，设它们依次是 a_1, a_2, …, a_{23}. (可以从任何一条弧开始编号. 在解题过程中各弧的号码保持不变.)先证明结论 I.

在圆 K 上可以放置七段每段长 7 cm 的弧，其中至少有一段弧所含集 Z 的点要少于 4 个，否则 Z 的点数将大于或等于 28，与题设矛盾. 用 AB 表示这样的一段弧. 如果 AB 弧恰好包含 Z 的 3 个点，那末结论 I 已证得.

如果 AB 弧所含的 Z 的点数少于 3 个(即，如果集 Z 属于 AB 弧的点数等于 0, 1 或 2)，那末让它沿圆 K 运动，使它的端点 A 依次与集 Z 的点重合. 我们证明，在 A 与这些点之一重合时，AB 弧恰好含集 Z 的 3 个点. 事实上，如果不是这样，对 $k=1, 2, \cdots, 23$ 有

$$a_k+a_{k+1}>7$$

(a_{24} 理解为 a_1)，由此

$$\sum_{k=1}^{23}(a_k+a_{k+1})>23\cdot 7.$$

但

$$\sum_{k=1}^{23}a_k=50,$$

因而从后一个不等式有 $2\cdot 50>23\cdot 7$. 这是不可能的.

现在证明结论 II.

为此需要证明，对某个 $k(1\leqslant k\leqslant 23)$ 同时成立不等式

$$a_k+a_{k+1}+a_{k+2}<7,\ a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3}>7,$$

其中 $$a_{24}=a_1,\ a_{25}=a_2,\ a_{26}=a_3.$$

事实上，否则将有

$$\sum_{k=1}^{23}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2})\geqslant 23\cdot 7$$

或 $$\sum_{k=1}^{23}(a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3})\leqslant 23\cdot 7,$$

即 $3\cdot 50\geqslant 23\cdot 7$ 或 $4\cdot 50\leqslant 23\cdot 7$.

这是不可能的.

如此，两个结论都已证得.

36. 首先证明，如果底边相等、顶点在底边同一侧(例如"上侧")的两个等腰三角形，它们的六个顶点与某个凸六边形的顶点重合，α 是底边"在下面"的三角形的底角，β 是另一个三角形的底角，那末 $\alpha>\beta$.

由这两个三角形顶点形成的六边形是凸的，它们的底边不会在一直线上，而且它们的顶点也不可能有重合的. 我们证明，无论这两个三角形相交还是不相交，$\alpha>\beta$ 都成立.

事实上，在相交时(图 44)，因为

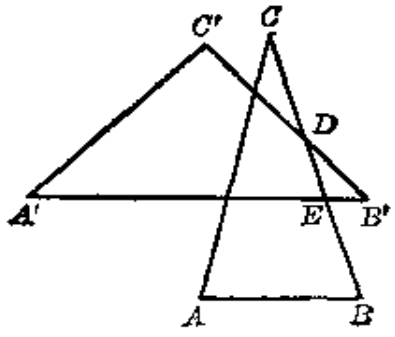


图 44

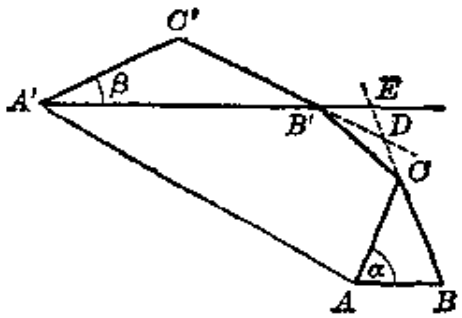


图 45

$$\angle C'DC=180^\circ-(\angle DEB'+\angle\beta)=\alpha-\beta,$$

所以，如 $\alpha\leqslant\beta$，应有 $\angle C'DC\leqslant 0$. 换句话说，顶点 C 将在 $\triangle A'B'C'$ 上.

在不相交时(图 45)，

$$\angle B'DE=180^\circ-(\angle B'ED+\angle DB'E)=\alpha-\beta,$$

因而 $\alpha\leqslant\beta$ 时，BC 边的延长线与 $\triangle A'B'C'$ 相交，$A'C'B'CBA$ 不是凸六边形.

现在，假定本题所说的凸多边形存在. 我们考虑它的与两个平行十字形端点重合的顶点. 十字形的端点是凸八边形的顶点. 去掉十字形“下面的”端点后，我们得到两个等腰三角形，按刚才所证，它们的底角满足 $\beta<\alpha$. 去掉十字形“上面的”端点后，又得到两个等腰三角形，而且应满足 $\alpha<\beta$. 这两个矛盾不等式证明：两个平行十字形的端点，不可能成为凸八边形的顶点.

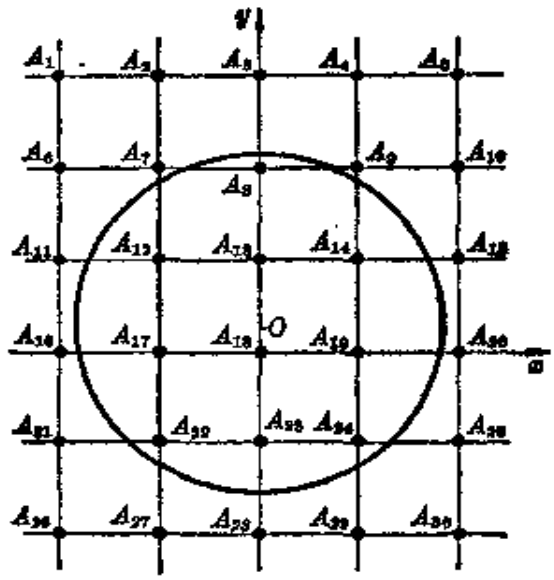


图 46

87. 因为圆面积等于 10 个基本正方形的面积，所以它的半径 $r=\sqrt{10/\pi}$. 我们证明，以坐标是 $x_0=0$, $y_0=1/4$ 的点为圆心，$\sqrt{10/\pi}$ 长为半径的圆，恰好包含单位正方形网格的 10 个格点：A_{12}、A_{13}、A_{14}、A_{17}、A_{18}、A_{19}、A_{22}、A_{23}、A_{24}、A_8(见图 46). 它不包含其它任何格点.

首先证明，上面所说的圆包含点 A_{24}，从而包含上面列出的头九个格点. 我们有

$$OA_{24}^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2+1=\frac{25+16}{16}=\frac{41}{16}<\frac{10}{\pi}=r^2.$$

其次，证明这个圆包含点 A_8：

$$OA_8^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}<\frac{10}{\pi}.$$

最后证明其它格点都不属于这个圆．为此只要证明点 A_{28}、A_{20}、A_9 在圆外．依次计算这些点到圆心的距离的平方，得

$$OA_{28}^2=\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{81}{16}>\frac{10}{\pi},\quad OA_{20}^2=\frac{1}{16}+4=\frac{65}{16}>\frac{10}{\pi},$$

$$OA_9^2=\left(\frac{7}{4}\right)^2+1=\frac{65}{16}>\frac{10}{\pi},$$

证毕．

38．如图 1 引进记号后，我们可写出方程组

$$\begin{cases} y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+h=1, \\ y^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=x^2, \\ h^2+\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2=x^2. \end{cases}$$

从第二和第三个方程得

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=y^2-h^2.$$

由于

$$1-\frac{x\sqrt{3}}{2}=y+h,$$

所以

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=(y-h)\left(1-\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

这样，我们得到两个方程的方程组

$$\begin{cases} y-h=\dfrac{\left(\dfrac{1-x}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}}, \\ y+h=1-\dfrac{x\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

经过简单的变形后，

$$y=\frac{2+2x^2-(1+2\sqrt{3})x}{2(2-x\sqrt{3})}.$$

把此式代入第一个方程组的第二个方程，在进行了十分令人厌烦但不复杂的变形后，得到下列 x 的四次方程：

$$2x^4-(2\sqrt{3}-1)x^3-(\sqrt{3}+2)x^2+(3\sqrt{3}+1)x-2=0.$$

显然，$x=1$ 是它的一个根，但不合题意．把方程左边的多项式除以 $x-1$，得三次方程

$$2x^3-(2\sqrt{3}-3)x^2-(3\sqrt{3}-1)x+2=0.$$

令 $x=z+(2\sqrt{3}-3)/6$，把它变形为

$$z^3+pz+q=0,$$

其中 $$p=-\frac{2\sqrt{3}+5}{4},\quad q=\frac{7\sqrt{3}+18}{36}.$$

不难验证，

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0,$$

据此，这个三次方程有三个不同的实根，它们可按公式

$$z_k=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{1}{3}(\varphi+2k\pi)$$

计算，这里 $k=0,\ 1,\ 2$；$\cos\varphi=-q/2\rho$，$\rho=(\sqrt{-p/3})^3$．

对于上面所说的系数 p、q 的值，$\cos\varphi\approx-0.706$，因此 $\varphi\approx3\pi/4$．

由本题条件可知，$1/2<x<1$．上述三次方程，只有对应

于 $k=2$ 的那个根满足这个不等式. 这样,

$$z=2\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+5}{12}}\cos\frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4}+2\cdot 2\pi\right)\approx 0.435.$$

因而

$$x=z+\frac{2\sqrt{3}-3}{6}\approx 0.435+0.0774\approx 0.512.$$

知道了 x, 不难求得

$$y\approx 0.11,\ h\approx 0.45.$$

39. 回答这个问题与我们是不是把两个镜面对称的四面体,看作不同的四面体有关. 在看作不同的时候,由小棒搭成的不同四面体有 60 种,看作相同的时候有 30 种. 我们证明这一结论.

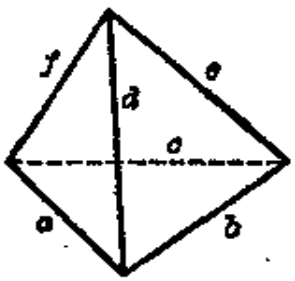


图 47

在图 47 上,简单地画出了一个四面体, 它的棱记为 a、b、c、d、e、f. 把小棒从 1 到 6 编号. 每根小棒可以放在任何一条棱的位置. 这样, 放置小棒的方法一共有 $6!=720$ 种, 即六件物体的全排列数. 但是, 并非所有排列都能成为不同的四面体. 有些四面体只是放置的位置不同.

暂时设图 47 上的四面体各条棱的长相等,我们考虑作这样的四面体,有多少种不同的方法. ("作好的"四面体应在图 47 所示的"标准"位置上.)我们指出: (1)它的任何一个界面都可作它的底面; (2)它的底面是等边三角形, 放置这个三角形可以有三种不同的方法. 因此,对同一个四面体,我们总共得到 $3\cdot 4=12$ 种不同位置(同时也是棱与原有四面体的棱重合的四面体的全部可能位置).

考察把小棒 1～6 配置于棱 $a\sim f$ 的所有 720 种情形. 由

于每个被搭成的四面体，在不同位置出现12次，所以由六根不同长度的小棒，所能搭成的不同的四面体，共有720÷12=60种．如果不区分镜面对称的四面体，那末不同四面体的个数要减少一半，等于30.

40. 小立方体的内界面，即彼此邻接的界面，在三对平行平面上．图48表示其中的一对．“截通”立方体的直线l，最多能把六个平面都截通一个点．因为直线l与小立方体的棱不相交，所以它与大立方体的内界面至多有六个交点．此外，直线l可以与两个外界面相交．这样，l与立方体界面的交点总共不超过8个．也就是说，它至多“截通”7个小立方体．

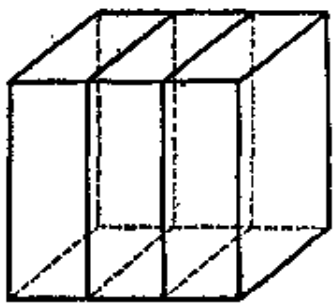


图 48

为了能作出通过7个小方块的直线l，我们把27个小方块编号．如图49所示，每个小圈代表一个小立方体，每个小立方体用三个数表示．第一个数代表它所在的水平层次的号码（从下向上数），第二个数代表平行于前侧面的纵层次的号码（从前往后数），第三个代表平行于左侧面的纵层次的号码（从左向右数）．如果两个小立方体只有一个数码不同，例如111和211，213和223，221和222，那末这些小立方体有公共的界面．第一种情形里是水平的，第二种是前侧的，第三种是左

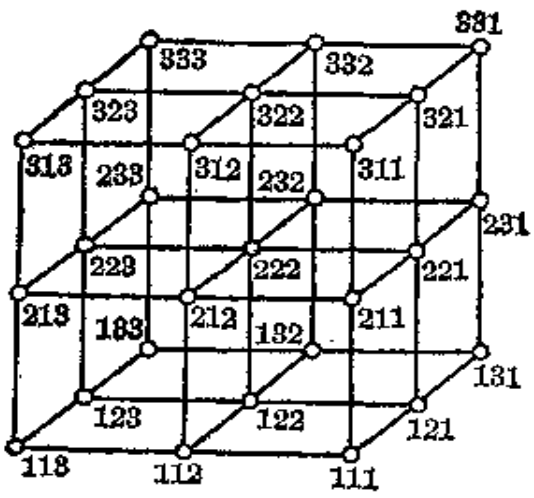


图 49

侧的.

由于直线 l 不通过任何一条棱，"被截通的"正方形不可能彼此仅仅用棱连接，而应有公共界面. 因而，如果把被直线 l 截通的小立方体的号码，按它们穿在直线 l 上的次序写出，例如

$$111,\ 211,\ 221,\ 222,\ 322,\ 332,\ 333, \qquad (1)$$

那末我们得到一个序列. 在这个序列中，相邻的号码只有一个数码不同，并且只差 1，而第一，第二，第三个数码分别形成非减或非增序列. 不难明白，只有在大立方体对角线两端的两个小立方体穿在直线 l 上时，l 才能穿过 7 个小立方体. 这样的小立方体可以是 111 和 333，113 和 331，131 和 313，133 和 311. 事实上，只有在这时，我们才能使数码变化六次（每次增大或减小 1），从而使所得到的 7 个小立方体串在直线 l 上.

显然，如果 l 通过对角线两端的两个小立方体，例如通过 111 和 333，那末它也通过中心的小立方体 222.

选择如图 49 那样分布的小圆作为顶点，可以把小立方体序列(1)用图表示(图 50). 在这样的图形里，沿纵线移动时第一个数码变动 1，沿斜线移动时第二个数码变动 1，沿横线移动时第三个数码变动 1.

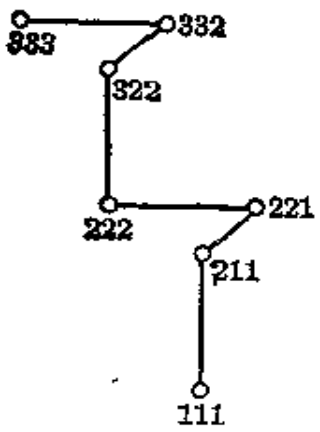


图 50

如果给定 l 上的两点，例如在立方体 111 和 333 里的点，那末 l 的位置被确定. 把大立方体投影到两个互相垂直的平面上(一个平面平行于底面，另一个平行于前侧面)，并且在小立方体 111 和 333 内任取点 (P', P'') 和 (Q', Q'')(图 51)，我们总得到

贯穿7个小立方体的直线l(只要l与任何一条棱都不相交).

图51所示的情形,直线l从点1穿出小立方体111进入211,在点2从小立方体211进入212,然后在点3进入小立方体222,在点4进入223,在点5进入323,最后,在点6进入333.直线l与某小立方体的棱相交意味着:l与小立方体内界面的交点1,2,…,6中,某些点两两重合(在图51中不发生这种情况).这个条件也可以换一种形式表达,无论在大立方体的那一个投影上,直线l都不通过网格的格点,这个网格是把大立方体的投影分成小立方体投影构成的,或者说,此直线的投影l'和l''都通过5个小正方形.

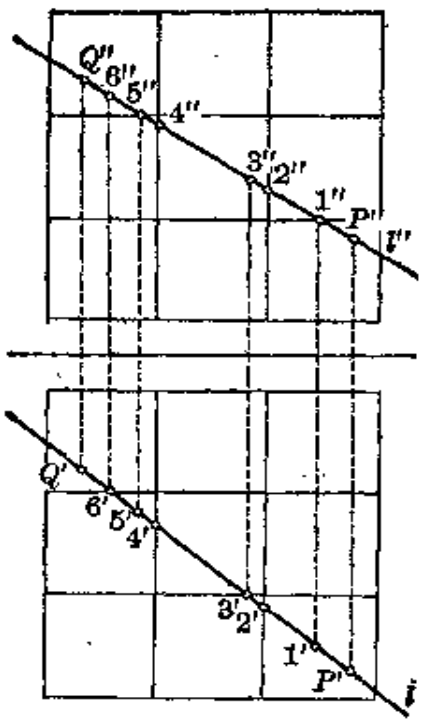


图 51

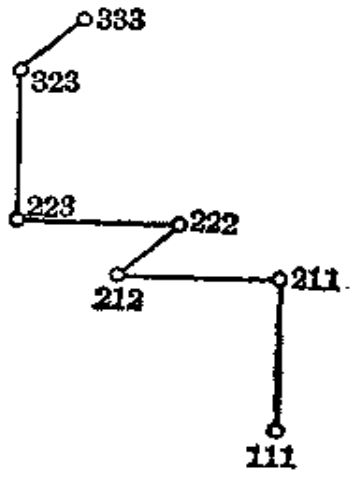
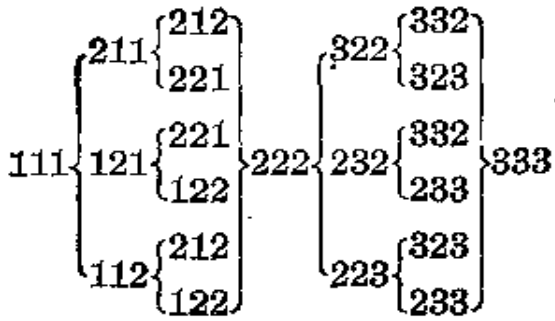


图 52

图51所示的串在直线l上的7个小立方体分布如图52.

通过小立方体111和333的直线l,可以用36种不同的方法穿过7个小立方体,这些方法可以用这样的格式写出:



这些不同的穿法可以如下得知. 取被直线 l 从小立方体 111 穿到 222 的一组小立方体. 把这组立方体绕大立方体对角线转动 120°, 然后再转动 120°, 便得到图 53 所示的三组小立方体. 取与这三组小立方体关于对角线平面 (通过大立方体底面对角线和中心的平面)对称的立方体组, 我们又得到了三组(图 54).

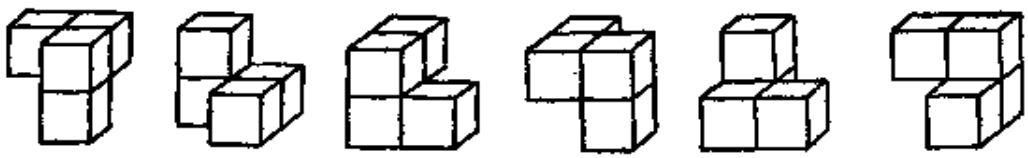


图 53

图 54

从小立方体 222 到 333, 直线 l 也通过六组不同的小立方体. 把前面 6 组与后面 6 组(彼此独立地)结合起来, 我们得到把 7 个小立方体穿在一条直线上的全部 36 种方法.

41. 如果把图 55 里虚线表示的球放在用实线表示的球的上面, 我们就得到了最紧密的球结构.

四个单位球之间形成小空隙(在图 55 里, 是以 A、B、C、D 为圆心的球之间). 因为这些球彼此相切, 所以它们的球心位置在正四面体 $ABCD$ 的顶点, 四面体的棱长为 2 (图 56). 能够放进这种小空隙的最大半径 (设为 r_1) 的球, 与四个单位球都相切, 它的中心与四面体的高的交点重合.

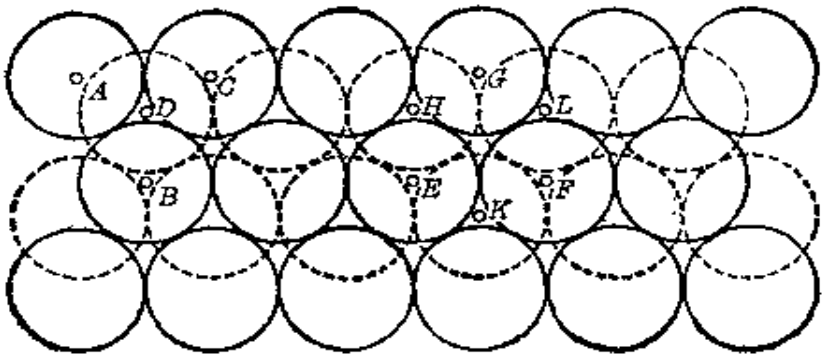


图 55

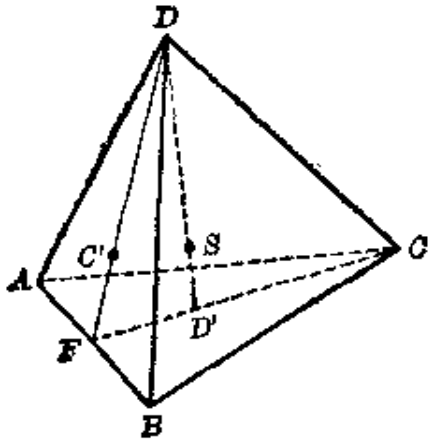


图 56

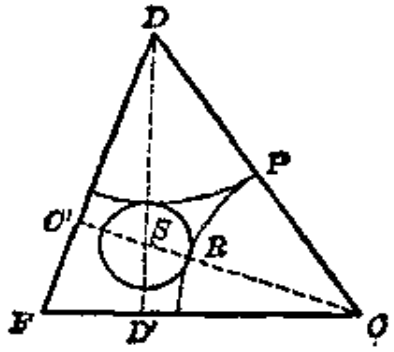


图 57

为了计算 r_1，考虑通过四面体 $ABCD$ 两条高 CC' 和 DD' 的平面与该四面体的截面 CDF（图 57），我们有：

$$CP=DP=CR=1,\quad CF=DF=\sqrt{3},$$

$$FD'=FC'=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad CC'=DD'=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$\triangle CSD'$ 和 $\triangle DFD'$ 相似，据此，

$$\frac{SC}{SD'}=\frac{FD}{FD'}$$

注意到 $SD'=DD'-DS=DD'-SC$，得

$$\frac{SC}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-SC}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}},$$

或
$$SC=2\sqrt{6}-3SC,$$

因而
$$SC=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

但 $r_1=CS-CR$, 所以

$$r_1=\frac{\sqrt{6}}{2}-1.$$

最紧密的单位球结构的大空隙，是在六个球之间形成的，例如图 55 上，球心在点 E、F、G、H、K 和 L 的球之间. 由于形成大空隙的六个球中任何三个都彼此相切，所以这六个球的球心是正八面体 $EFGHKL$ 的顶点，八面体的棱长为 2 (图 58). 能放进这种大空隙的最大半径(设为 r_2) 的球，与六个球都相切，它的球心与正八面体 $EFGHKL$ 的对称中心重合，即与正方形 $FGHK$ 的中心重合(图 59). 半径 r_2 可以作为与四个单位圆相切的圆的半径来计算，这四个单位圆的圆心是正方形顶点.

这样一来，

$$KF=FG=GH=HK=2,\ HF=2\sqrt{2},$$

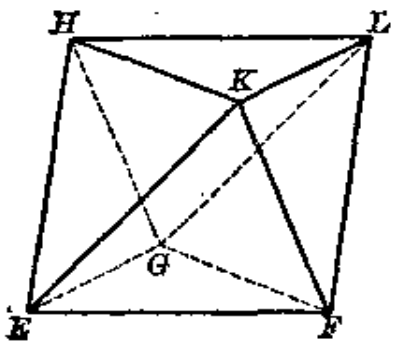


图 58

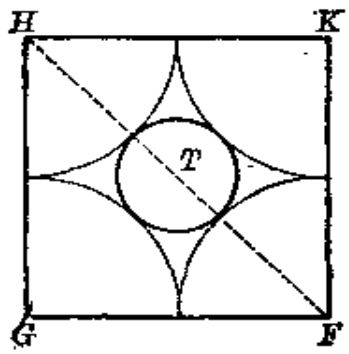


图 59

因此 $$r_2=\sqrt{2}-1.$$

42. 设 n 是通过球 K 的球心、平行于已知正多面体界面的平面数. 每一个这样的平面在球面上截出一个大圆. 显然所有的大圆相交，并且，如果多面体是正的，不可能同时有三个这样的大圆交于一点(事实上，如果同时有三个大圆通过某个点，这就是说，在多面体上，至少有三个同时垂直于某个平面，而彼此又不平行的界面. 这对于正多面体来说是不可能的). 这样，我们所考虑的大圆在 $n(n-1)$ 个点相交，而这些交点把它们分成 $2n(n-1)$ 条弧，因为从每个这样的交点有 4 条弧出发，而每一条弧连接两个交点. 由此可知，导出多面体有 $w=n(n-1)$ 个顶点，$k=2n(n-1)$ 条棱. 如果 s 是导出多面体的界面数，那末应用多面体的欧拉公式 $w+s=k+2$ 得

$$n(n-1)+s=2n(n-1)+2,$$

由此 $$s=n^2-n+2.$$

利用这些式子，我们对五种柏拉图体(即正多面体——译者)，列出它们的导出多面体的顶点、棱、界面的个数表.

正多面体名称	n	导出多面体		
		w	k	s
立方体	3	6	12	8
正四面体	4	12	24	14
正八面体	4	12	24	14
正十二面体	6	30	60	32
正二十面体	10	90	180	92

现在，我们直接转到作导出多面体.

(1) 作立方体的导出多面体是特别简单的. 可以认为球 K 内切于立方体. 那末，通过球心且平行于立方体界面的平

面，在球面上划出的大圆将交于球和立方体的切点．因而立方体的导出多面体是正八面体．

(2) 我们已经知道，正四面体的导出多面体是有 12 个顶点，24 条棱的 14 面体．过球心且平行于此四面体底面的平面，分别与三个平行于侧面的平面相交，它们的交线都是直径，并且分别平行于四面体的底棱，因而，对应于四面体侧面的大圆，把对应于底面的大圆分成六段相等的弧．由于此四面体是正的，故其它大圆也被六等分．这样，导出 14 面体的棱长都等于球 K 的半径．

平行于原四面体三个侧面的大圆相交于六个点，它们构成两个球面三角形的顶点（图 60）．这些三角形对应于导出十四面体的两个等边三角形的界面．对原四面体的其它界面重复同样的讨论，我们总共得到 8 个全等的等边三角形．由于无论哪一对三角形界面没有公共棱(但每个顶点属于三个等边三角形界面)，所以我们的作法用尽了导出多面体的所有的棱．这样，另 6 个界面应该是四边形，又由于这个导出多面体的所有的棱等长，所以这 6 个界面是菱形．

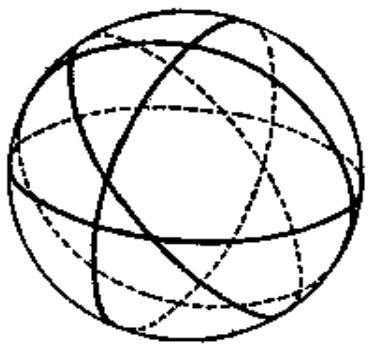


图 60

我们证明，这些菱形实际上是正方形．

例如，考察这个导出十四面体的在平行于原四面体底面的平面上的棱．它们形成一个正六边形，这些边平行于十四面体的主对角线，因而也平行于原四面体的底棱．对导出十四面体的其它的棱也可如此讨论．但正四面体的不相交的棱两两垂直，所以菱形不平行的边也两两垂直，即这些菱形实际

上是正方形.

如此，正四面体的导出多面体，是由正方形和等边三角形构成的半正十四面体(图 61).

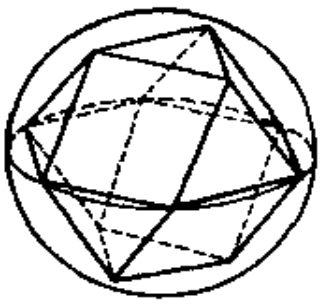


图 61

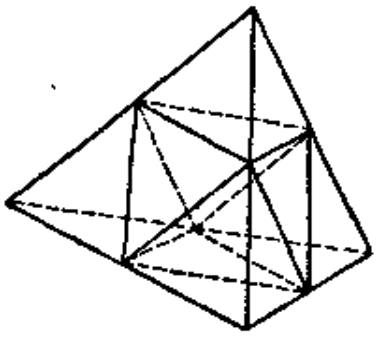


图 62

(3) 用正四面体界面上的线段，连接正四面体各棱的中点，我们得到正八面体(图 62). 因为如此作出的正八面体的界面，平行于正四面体的相应的界面，所以正八面体的导出多面体，也就是正四面体的导出多面体.

(4) 正十二面体的导出多面体的作法，可以如正四面体一样地进行.

我们分出正十二面体的两个平行界面称之为底面. 那末过球心且平行于五个侧面的平面，与水平面内的大圆相交，它们的交线都是直径，并且分别平行于正十二面体上、下底面的棱. 这样，对应于底面的大圆被分成十段相等的弧. 同样地，其它大圆也如此. 因而正十二面体的导出多面体各棱的长相等.

平行于侧面的大圆在 20 个点相交. 这些点中，五个组成一个球面正五边形的顶点，又五个组成另一个球面正五边形的顶点. (这些五边形的存在性，可从沿底棱相交的平面的平行性得到，它们的正确性可从弧与弧之间的角都相等得知.)

用弦连接这些五边形的顶点，得到两个正五边形(图 63)，它们在平行于正十二面体底面的平面内.

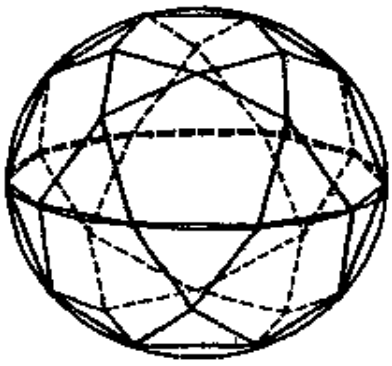


图 63

对正十二面体的其它各对界面重复以上讨论，我们得知，正十二面体的导出多面体有 12 个界面是正五边形. 由于随便哪两个五边形都不会有公共的棱，所以我们的作法用尽了导出多面体的棱. 这样，它的另 20 个界面应该是正三角形(已经证明过，这些界面由 60 条等长的棱为界). 所得到的多面体称为半正 32 面体.

(5) 现在作正二十面体的导出多面体. 这种情形要比前几种复杂得多，所以我们不从整个正二十面体出发，而只考虑它的一半，也就是，在某个界面(例如图 64 里的 ABC，它可以看作正二十面体的底面)的顶点会聚的十个界面构成的图形.

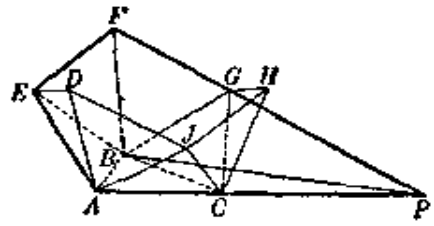


图 64

为了作导出多面体，只要知道平行于这些界面的平面，因为正二十面体的其它十个界面(它们的一个顶点与底面 ABC 连接)是平行于这些界面的.

平行于与底面有公共棱的界面(因而分别平行于直线 AB, BC, CA) 的平面，把平行于底面的大圆六等分. 为了求得平行于其它侧面的平面，分这个大圆的分点的位置，必须计算这些侧面与底面的交线和底棱之间的夹角. 例如，我们来计算界面 BFG 与 ABC 的交线和 AC 棱之间的夹角.

因为 $AEFGC$ 是正五边形，所以延长它的边 AC 和 FG

交于点 P, $\angle GPC=36°$. 因此,

$$GP=CP=\frac{\sqrt{5}+1}{2}CG=\frac{\sqrt{5}+1}{2}AB.$$

从 $\triangle ABP$ 可得线段 BP 的长度:

$$\begin{aligned}BP&=\sqrt{AB^2+AP^2-2AB\cdot AP\cos 60°}\\&=\sqrt{AB^2+(AC+CP)^2-AB(AC+CP)}\\&=\sqrt{AB^2+CP^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2}AB\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+1)AB.\end{aligned}$$

现在已不难计算界面 BFG 和 ABC 的交线与 AC 之间的夹角 BPA. 事实上,

$$\frac{\sin\angle APB}{AB}=\frac{\sin\angle BAC}{BP},$$

因此

$$\sin\angle APB=\frac{AB}{BP}\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}.$$

$$\angle APB=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}=\arcsin 0.3784\approx 22°14'.$$

如此,平行于正二十面体侧面的九个大圆,把平行于底面的大圆分成不等的 18 份, 12 份为 $22°14'$, 六份为

$$60°-2\cdot 22°14'=15°32'.$$

其它大圆也如此. 这样,正二十面体的导出多面体的棱不全相等,它们分成两组、较长的棱比较短的棱要多一倍. 所以,正二十面体的导出多面体有 120 条长棱, 60 条短棱.

现在考虑,例如, 在顶点 A 相交的界面. 平行于这些界面(因而平行于棱 JC, CB, BE, ED 和 DJ)的平面,在球 K

上截出两个正球面五边形. 这样的五边形一共有十二个(每一条棱连接两个顶点). 形成两个这样的五边形的五个圆产生十个三角形，每个球面五边形连着五个三角形(图 65). 这些三角形与五边形有一条公共边. 一共有六十个这样的三角形. 如此，正二十面体的导出多面体的所有的棱都作出来了(见前面的表格). 导出多面体由 120 条棱为界的其余界面是六边形，它们的各边都相等. 以弦代替大圆的弧，我们得到了导出多面体.

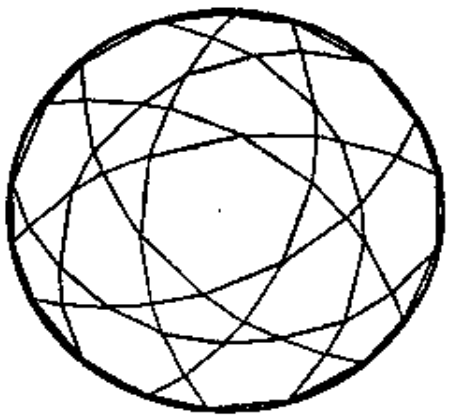


图 65

现在更详细地考察一下这些六边形. 上面已经提到，它们的边相等. 它们由球面上对应于通过棱 DJ、JH、HG、GF、FE 和 ED 的界面的大圆的弧形成. 界面之间的角不等，并且取决于邻接的界面是否只有一个公共顶点. 因此，这些等边六边形的角也不等. 如果把它的内角编号，那末偶数号的角相等，奇数号的角也相等. 因为它各边相等，所以不可能是平面六边形，否则，它应是正六边形(它的各个顶点在球面上，如是平面图形的话，这些顶点将在一个圆上).

这样，正二十面体的导出多面体不是普通意义下的多面体.

43. 我们只举一个与这个假设矛盾的例子.

作下述四面体的展开图：其底面是等边三角形，侧面是顶角为 30° 的等腰三角形，顶点是 S(图 66). 设 P 是一条底棱的中点. 从展开图上任一点 x 到 P 点的距离总小于线段 SP 的长度，因为展开图上的所有点都在以点 P 为圆心、PS 为

半径的圆内，只有 S 点在圆上．由此可知，在这个四面体的界面上，任何一条连接点 P 和 S 的弧要比线段 PS 长．因而，这个四面体违反本题所说的假设，证毕．

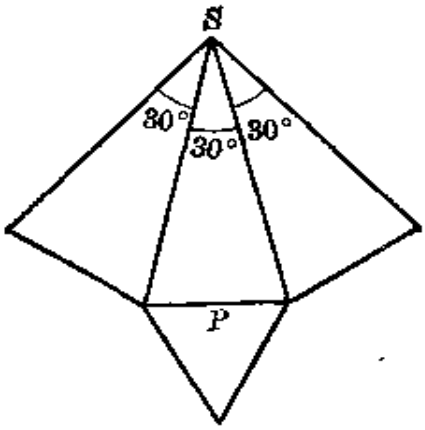


图 66

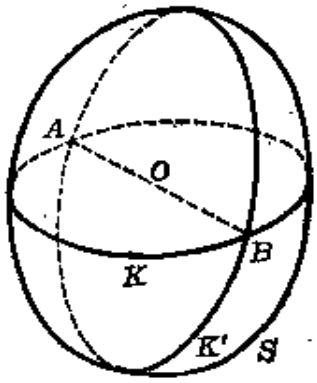


图 67

44．设 S（图 67）是满足题设的闭曲面．取一个截口，使之不小于其它任何的截口．设这样的截口为圆 K．过 K 的圆心 O 作曲面 S 的一个截口 K'．K 和 K' 所在的平面相交于圆 K 的直径 AB，这说明 AB 是圆 K' 的弦．因而，圆 K' 不会小于圆 K．另一方面，K' 又不能大于 K，因此它们相等且有公共圆心．

K' 的选择是完全任意的，只有唯一的一个条件，即它所在的平面应通过 K 的圆心 O．因此用通过 O 点的任何平面截 S 得到的截口，都有刚才证明的 K' 所具有的性质，所以曲面 S 是球面．

45．引进空间直角坐标系 O–XYZ（图 68）．在 X 轴上任取一点 P（异于 O），在 XY 平面上，过点 P 作垂直于 X 轴的直线 t．然后在 XZ 平面上作以 P 点为圆心，PQ 为半径的圆弧 AQB．过直线 t 和 A 点作平面 π．现在，我们绕直线 t 转动 π 到通过 B 点为止．在平面 π 上每一位置，以线段

MN 的中点 S 为圆心作通过点 M、N 的圆（点 M 在弧 AQB 上，N 在 Z 轴上），我们得到一个凸闭曲面（“双牛角形”），它不是球面，但满足本题的全部条件．实际上，通过直线 t 的任何一个平面如果与它相交，交线都是圆．

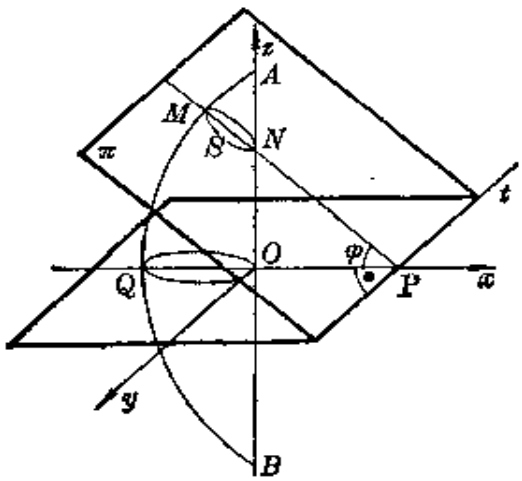


图 68

46. 由于质点 M 的速度分量 u、v、w 算术无关，所以 u、v、w 不能同时为 0．其次，不失一般性，可设 $u\neq 0$．

点 M 在 x 轴上的投影以速度 $|u|$ 向前和向后运动．设 τ 是点 M 返回初始位置 $M(0)$ 所需的时间，那末它在立方体平行于 x 轴的棱上的投影 M_x，也经过时间 τ 返回初始位置．投影 M_x 在时间 τ 内通过的全部路程等于 $|u|\tau$．如果 d 是立方体的棱长，那末 M_x 从 M 开始运动到返回初始位置所通过的路程，由 k（偶数）条线段 d 组成．这样，$|u|\tau=kd$．

类似地，由质点 M 通过时间 $\tau>0$ 返回初始位置 $M(0)$，即由

$$M(\tau)=M(0)$$

的假设可知，y 和 z 轴方向的速度分量满足

$$|v|\tau=ld,\quad |w|\tau=md.$$

不过，偶数 l 和 m 可以是 0，同时，偶数 k 显然不等于 0，因为 $\tau>0$，$u\neq 0$．因而

$$l|u|\tau-k|v|\tau=lkd-kld=0.$$

约去 τ 得

$$l|u|-k|v|=0$$

或
$$l|u|-k|v|+0\cdot w=0.$$

质点 M 在时刻 τ 时的速度方向(从而它的各分量的符号),由它的初始速度的方向唯一地确定. 在上式中以 u 或 $-u$ 代 $|u|$, v 或 $-v$ 代 $|v|$, 我们得到整系数 p、q、r 的关系式

$$pu+qv+rw=0.$$

由于 $|q|\neq 0$, 这与质点 M 的速度分量 u、v、w 的算术无关性矛盾. 因而,假设质点 M 经时间 τ 返回初始位置是不正确的.

47. 第二个条件(不相邻界面上的数有不等于 1 的公约数)允许不同的解释. 可以有三种不同方式理解它:

1. 放在不相邻界面上的每一对数有公约数(不等于 1, 为简单起见,下面不再提到这个限制).

2. 放在不包括相邻界面的任何一组界面上的数有公约数.

3. 任取一个界面. 考虑由它及与它不相邻的所有界面构成的一组界面. 放在此组内各界面上的数有公约数.

随着解释的不同,本题允许有不同的解.

设我们按第一种方法理解第二个条件. 此时,本题不仅对正多面体有解,而且对所有多面体都有解.

事实上,任取一个多面体,把它的界面用顺序的自然数编号,并且考虑所有可能的界面偶,每一个界面偶由两个相邻的或不相邻的界面构成. 把由不相邻界面组成的偶编号,并且在组成第 k 个偶的两个界面上写第 k 个素数 p_k. 最后,把写在同一个界面上的数抹去,而以它们的积代替.

也许,在某些界面上按上述方法填写它们的数时是空的.

在每个空的界面上，我们随便写一个还没有用过的素数.

显然，不管所考察的多面体是不是正的，应用这种方法，本题的两个条件都是满足的.

若本题的第二个条件按第二种方法理解，则解法与上述类似. 把不相邻界面形成的各个组编号，在第 k 组的每个界面上写上第 k 个素数. 以后的做法与上述完全一样.

最后，如果按第三种方法理解第二个条件，那末本题只对立方体和四面体有解. 在正的立体中，它们与众不同：与任选的一个界面不相邻的界面里，不会有彼此相邻的界面偶. 在立方体里，每一个被选到的界面只有一个与它不相邻的界面；在正四面体里，任何两个界面都相邻. 在其它正立体的界面上放置自然数，不违反按第三种方法理解的第二个条件是不可能的.

48. 三个已知球中随便哪两个都不能相切. 否则，通过切点 P 的平面将与两个球相切，而且与第三个球相交于某个圆，这个圆过 P 点的切线将与这三个球都相切，与题设矛盾.

因而，两个圆应该沿 P 所在的圆相交. 这个圆与第三个球也相交，如果不相交的话，此圆过 P 点的切线与这三个球都相切. 由于这个圆与第三个球相交于 P 点，所以它们应该还有一个交点，这个交点也属于这三个球.

49. 先证明引理：圆内接三角形中，正三角形的面积最大.

设圆内接三角形中，有最大面积的三角形 ABC 不等边（图 69）. 例如设 $AB \neq AC$. 作 $\triangle A'BC$，它的顶点 A' 与垂直于线段 BC 的直径的端点重合，这个端点与 A 点在直线 BC 的同一侧. $\triangle A'BC$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积，因为，它们

有相同的底边 BC，而 $\triangle A'BC$ 的高大于 $\triangle ABC$ 的高．事实上，$A'F=A'O+OF$，$AE=AD+DE$，但 $OF=DE$，$A'O>AD$．这个矛盾证明了圆内接三角形中，正三角形面积最大．引理得证．

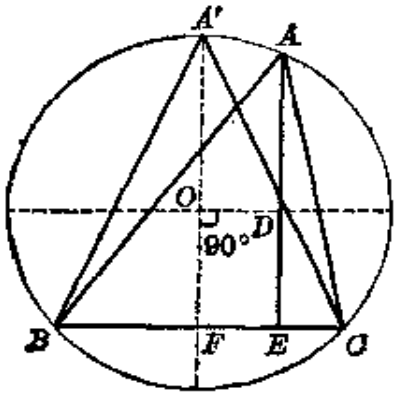


图 69

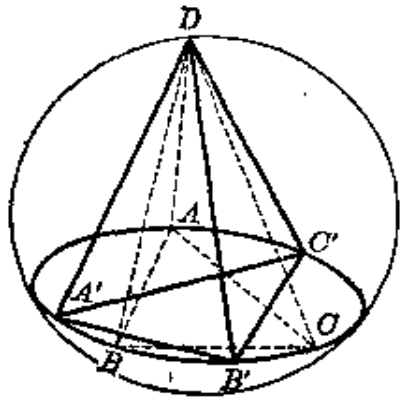


图 70

现在证明本题的结论．设有四面体 $ABCD$，它不是正的，但却是球内接四面体中体积最大的一个(图 70)．在四面体 $ABCD$ 的界面中，至少能找到一个面不是正三角形．例如，设 $\triangle ABC$ 不等边．作四面体 $A'B'C'D$，它的底面是正三角形，与 $\triangle ABC$ 同内接于一个圆．根据引理，$\triangle A'B'C'$ 的面积大于 $\triangle ABC$ 的面积，但四面体 $ABCD$ 与 $A'B'C'D$ 等高，所以，与假设相反，四面体 $A'B'C'D$ 的体积比四面体 $ABCD$ 的体积大．这样，在球内接四面体中，正四面体的体积最大．证毕．

50．满足本题条件的四条直线画在图 71 上，其中三条包含立方体的棱 DC，BB'，$A'D'$，而第四条——直线 KL——通过立方体相对的棱 AA' 和 CC' 的中点．这四条直线既不相交也不平行(用解析几何不难证明这些事实，但我们不加证明地应用它们)．我们证明，无论什么样的第五条直线不会与

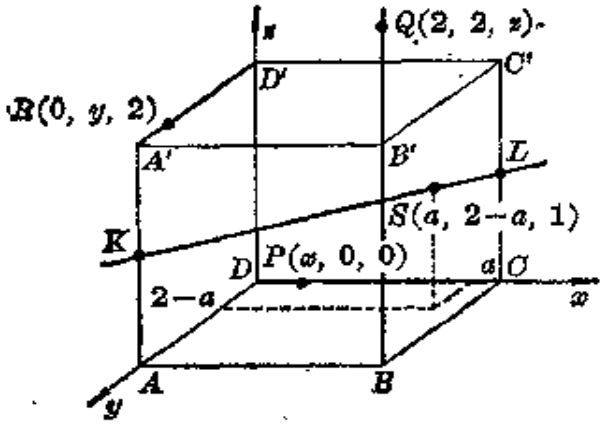


图 71

这四条直线全相交.

如图 71，引进直角坐标系. 采用立方体棱长的一半作长度单位（三根轴都一样）. 设存在第五条直线与上面所说的四条直线在点 P、Q、R、S 处相交，其中，P 点在直线 DC 上，Q 在 BB' 上，R 在 $A'D'$ 上，S 在 KL 上. 交点的坐标是：$P(x, 0, 0)$，$Q(2, 2, z)$，$R(0, y, 2)$，$S(a, 2-a, 1)$. 由于 P、Q、R、S 在一直线上，向量 $\overrightarrow{PQ}[2-x, 2, z]$，$\overrightarrow{PR}[-x, y, 2]$，$\overrightarrow{PS}[a-x, 2-a, 1]$ 共线，因此，

$$\frac{2-x}{-x}=\frac{2}{y}=\frac{z}{2}, \tag{1}$$

$$\frac{a-x}{-x}=\frac{2-a}{y}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

由(2)可得，

$$y=4-2a, \tag{3}$$

$$x=2a. \tag{4}$$

把(3)、(4)代入(1)，得

$$\frac{2-2a}{-2a}=\frac{2}{4-2a}$$

或二次方程

$$a^2-2a+2=0.$$

它的判别式小于 0，所以方程组(1)、(2)没有实数解，从而点 P、Q、R、S 不可能在一直线上.

51. 考虑立方体 $ABCDA'B'C'D'$（图 72），从顶点 A 作

线段 AB'、AC'、AD'、AC 得到三个棱锥：$AA'B'C'D'$、$ABB'C'C$ 和 $ADD'C'C$(其中第一个单独地画在图 73 中). 这些棱锥两两相等. 事实上，例如我们取 $AA'B'C'D'$ 和 $ABB'C'C$，它们的高 AA' 和 BB' 以及底面 $A'B'C'D'$ 和 $BB'C'C$ 都相等. 把棱锥 $AA'B'C'D'$ 和 $ABB'C'C$ 拼起来，使前者的顶点 A'、B'、C'、D' 分别与后者的顶点 B、C、C'、B' 重合，那末棱 AA' 和 AB 重合. 不难看出，类似的结论对其它各对侧棱也成立.

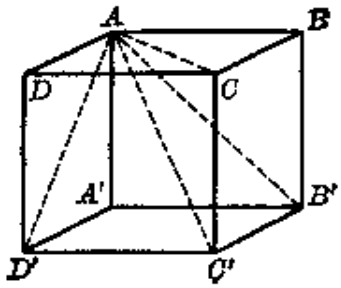


图 72

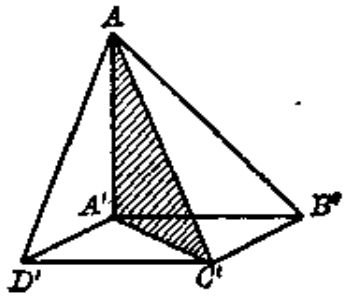


图 73

平面 $AA'C$ 把棱锥 $AA'B'C'D'$ 分成两个三棱锥，它们关于平面 $AA'C$ 镜面对称. 作另两个四棱锥的对称平面 ABC' 和 ADC'，不难验证，我们得到了本题要求的、把立方体 $ABCD$–$A'B'C'D'$ 分成六个四面体的方法，其中三个全等，而另三个经镜面反射后转变为前三个.

52. 考虑立方体的铁丝模型 $ABCD$–$A'B'C'D'$. 从顶点 A 作线段 AB', AC', AD', AC(图 74)，我们得到棱锥 $AA'B'C'D'$，$ABB'C'C$ 和 $ADD'C'C$ 的三个铁丝模型. 第一个模型可以填满为棱锥，只要连接棱 AA' 的每个点与棱 $B'C'$ 的每个点及与棱 $C'D'$ 的每个点. 对另两个模型也可用类似的方法. 对第二个模型，把 AB 与 $B'C'$ 的点及 AB 与 CC' 的点连接起来；对第三个模型，把 AD 与 $C'D'$ 及 AD 与 CC' 的所有的点连接起来. 上述方法把立方体的“骨架”填满为符合本题条件

的"肉体"模型，因为，填满棱锥模型时，我们已经作了只连接属于立方体棱的点的线段.

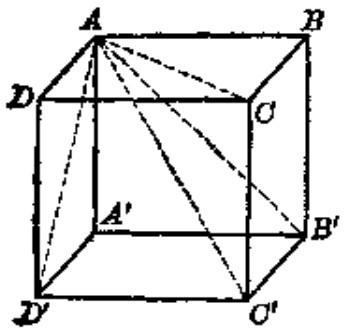


图 74

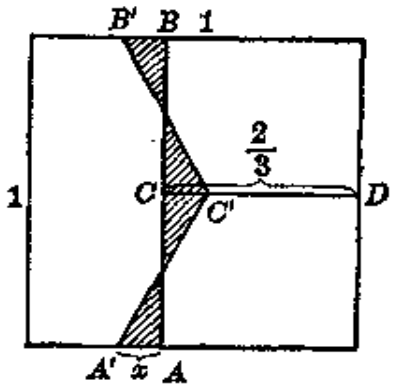


图 75

53. 用线段 AB 和 CD 把正方形田块分成三个矩形，如图 75 所示. 我们得到，分界线的总长度是 5/3.

现在，用折线 $A'C'B'$ 和线段 $C'D$ 划分方形田块，使 $AA'=CC'=BB'=x$. 显然，此时三部分的面积不变.

我们考虑 x 取什么值时，分界线的总长度小于 5/3.

为了回答这个问题，需要解不等式(图 75)

$$2\sqrt{(2x)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{2}{3}-x<\frac{5}{3}.$$

变形后得

$$4\left(4x^2+\frac{1}{4}\right)<(x+1)^2=x^2+2x+1,$$

$$15x^2-2x<0,$$

因此

$$0<x<\frac{2}{15}.$$

我们把上面考虑的这类分界线的总长度记为 $L(x)$，则

$$L(x)=\sqrt{16x^2+1}+\frac{2}{3}-x.$$

函数 $L(x)$ 当

$$x=\frac{\sqrt{15}}{60}$$

时达到极小值

$$L_{\min}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{15}}{4}\approx 1.635<\frac{5}{3}.$$

54. 设 O 是彼此形成等角的四条射线的始点(图 76). 在这些射线上截取线段 $OA=OB=OC=OD$, 作正四面体 $ABCD$. O 点是这个四面体的外接球心. 延长线段 OD 与平面 ABC 相交, 记交点为 D_1. 点 D_1 是等边三角形 ABC 的中心, 而线段 DD_1 是四面体 $ABCD$ 的高. 根据正四面体的性质, $D_1O=\frac{1}{3}OD$. 因而

$$\cos\angle D_1OB=\frac{D_1O}{OB}=\frac{D_1O}{OD}=\frac{1}{3},\ \cos\angle BOD=-\frac{1}{3},$$

$$\angle BOD=\arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

如果在三维空间内有从一点出发的、彼此间夹角相等的五条射线, 那末, 只要重复上述作法, 将得到一个有五个顶点

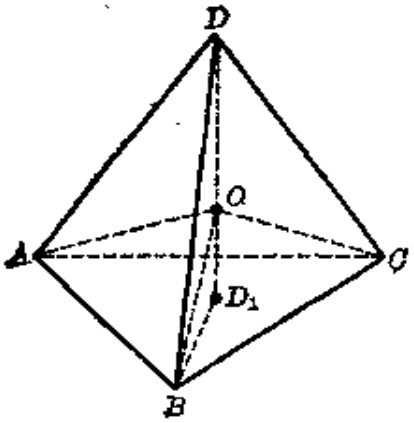


图 76

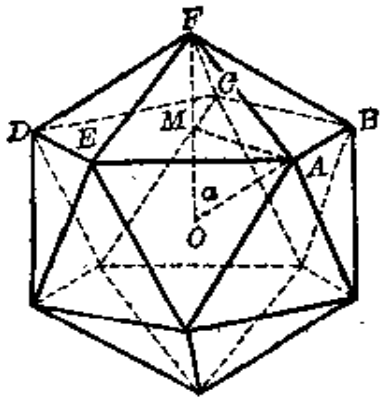


图 77

的正多面体. 但这样的多面体不存在.

55. 由于 $ABCDE$ 是正五边形(图 77), 所以

$$AM=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}AB,$$

其中 M 是五边形 $ABCDE$ 的中心.

从 $\triangle AFM$(由于 $\angle AMF=90°$) 可以计算 $\angle AFM$:

$$\sin\angle AFM=\frac{AM}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}. \qquad (AB=AF)$$

现在已经不难计算正二十面体外接球半径 OA 和 OF 的夹角($\angle AOF=\alpha$). 事实上, $\angle AFO=90°-\alpha/2$, 故

$$\sin\angle AFM=\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\alpha=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}=\arccos 0.4472=63°26'.$$

56. 所求的比值 k, 等于四面体截球面所得的立体角与球的其余部分之比.

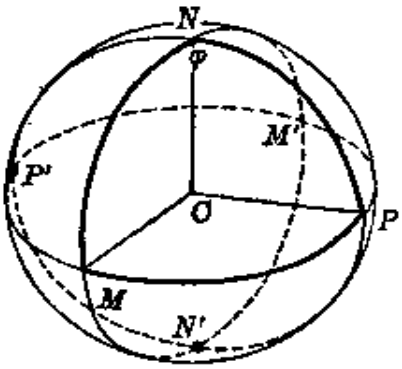


图 78

我们计算正四面体的三面角. 为简单起见, 考虑顶点与 O 点重合的三面角. 设 r 是球半径. 过三面角的每两条棱作一个平面, 得到等边的球面三角形 MNP(图 78). 这个球面三角形的角 φ 等于四面体的二面角, 因而 $\varphi=\arccos\frac{1}{3}\approx 1.23$. 延长球面三角形 MNP 的边构成六个球面二角形, 其中三个公有球面三角形 MNP, 而另三个公有球面三角形 $M'N'P'$. 这六个球面二角形的面积是 $2\varphi r^2=2r^2\arccos\frac{1}{3}$. 有公共三

角形(随便 MNP 还是 $M'N'P'$) 的三个二角形占有半个球面. 因而,若记 x 为三角形 MNP 的面积,则

$$3\cdot 2\varphi r^2-2x=2\pi r^2,$$

由此,

$$x=(3\varphi-\pi)r^2=\left(3\arccos\frac{1}{3}-\pi\right)r^2\approx 0.55\pi r^2.$$

所求的比值为

$$k=\frac{4\pi-\left(3\arccos\frac{1}{3}-\pi\right)}{3\arccos\frac{1}{3}-\pi}=\frac{5\pi-3\arccos\frac{1}{3}}{3\arccos\frac{1}{3}-\pi}\approx 21.8.$$

57. 第一次称量比较五个物体中的二个. 设较轻的一个为 A, 较重的一个为 B, 那末第一次称量的结果可写成

$$A<B$$

(读成"A 比 B 轻"). 然后比较另两个,把较轻的记为 D, 较重的记为 E:

$$D<E.$$

第五个物体记为 C.

第三次称量比较 B 和 E. 可以发生两种情况, 对这两种情况进行的讨论是类似的, 因此我们只考虑 $B<E$ 的情形. 结果,进行三次称量后知道

$$A<B<E,\ D<E.$$

第四次称量比较 C 与 B. 必需区别两种情形: (1)$B<C$, (2)$C<B$.

(1) 当 $B<C$ 时有

$$A<B<E,\ D<E,\ B<C.$$

为比较 C 和 E, 需要第五次称量. 也有两种可能: $E<C$ 或 $C<E$.

若 $A<B<E<C$, 则比较 A 与 D, B 与 D 之后, 可以确定比 E 轻的物体 D 的位置. 这样, 为确定五个物体按重量排列的次序, 需要进行七次称量.

若 $A<B<C<E$, 为确定 D 的位置也只要两次称量. 先比较 D 和 B, 然后, 根据它的结果比较 D 和 A 或 D 和 C. 结果, 仍进行七次称量.

(2) 当 $C<B$ 时有

$$A<B<E,\ C<B,\ D<E.$$

比较物体 A 和 C (第五次称量). 在可能有的两种情形 ($A<C<B$ 或 $C<A<B<E$) 里, 为确定 D 的位置(我们已经知道它比 E 轻), 只要两次称量就够了. 因而, $C<B$ 时, 为按重量增加次序排列物体, 需七次称量.

至此, 我们已穷尽了所有可能的情形, 所以证明至此结束.

可以证明下列更一般的结论: 为使 n 个物体 ($n\geqslant 2$) 按重量减少的次序排列, 只需要进行 $d_n=1+nk-2^k$ 次称量, 这里 k 是满足不等式 $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$ 的自然数.

58. 解法一: 设 a、b、c 分别是甲、乙、丙每天所吸的烟占公有的那包烟丝的份数, 那末

$$a+b=\frac{1}{30},\quad a+c=\frac{1}{15},\quad b+c=\frac{1}{12}.$$

把这三个方程的两边分别相加, 得 $a+b+c=11/120$. 把这个等式依次减去前三个, 得 $a=1/120$, $b=3/120$, $c=7/120$. 这样, 三个人一起抽, 烟丝在 $1:(1/120+3/120+7/120)=120/11$ 天用完. 为计算每人应付的钱, 只要把 120 兹罗提按 1:3:7 分成三份.

解法二: 这个问题可以更简单地解决. 设甲、乙、丙每天

抽值 x、y、z 兹罗提的烟丝.

不难看出:

$$x+y=4,\ x+z=8,\ y+z=10.$$

解之得

$$x=1,\ y=3,\ z=7.$$

这样,三个人抽烟,在 $120:(1+3+7)=120:11$ 天内用完烟丝,他们应按 1:3:7 分担用费.

59. 设枕木沿地板及铁轨沿枕木无滑动地滚动,那末问题的条件可以如图 79 所示.

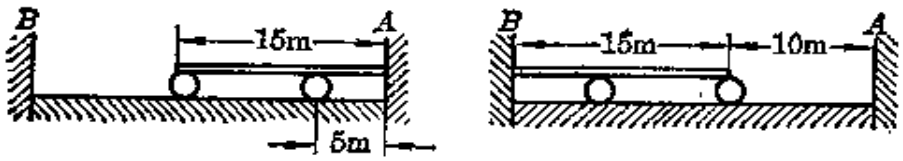


图 79

若在滚动中枕木的轴向不变,则枕木转一转时铁轨从 A 壁向 B 壁移动的距离,等于枕木横截面的周长. 但是,枕木本身也向 B 壁滚动,每转动一周通过的距离等于横截面的周长. 这样一来,当铁轨通过 2×5 m 时,它的端点受到 B 壁的阻碍. 由于铁轨的长度是 15 m,所以工厂车间的宽度等于 25 m.

60. 设有 n 个人参加游戏. 把各个参加者提出的估计值记为 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n$. 设 $a=\max(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-2})$.

我们假定,号码为 1, 2, $\cdots$, $n-2$ 的参加者是诚实的,他们是尽可能正确地回答所提的问题,而第 $n-1$ 和 n 号两个人是串通的. 大大地抬高估值 a_{n-1},使

$$a_{n-1}>a.$$

为了使串通者获胜,只要让另一个人写出估值

$$a_n\geqslant(n-1)a_{n-1}.$$

事实上，在这样的估计下，全部估值的算术平均 S 满足不等式

$$S=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n}{n}>\frac{a_{n-1}+(n-1)a_{n-1}}{n}=a_{n-1}.$$

由于 $a_{n-1}>a$，所以

$$a<a_{n-1}<S,$$

由此，经过不复杂的变形得

$$0<S-a_{n-1}<S-a.$$

这个不等式意味着，如果提出估值 a_n 的人不胜，那末提出 a_{n-1} 的人获胜.

为了减少有如此串通的危险，弗劳兹拉夫游戏的规则可改动如下：从估值 a_1，a_2，…，a_{n-1}，a_n 中去掉两个最大的，然后计算其余 $n-2$ 个估值的算术平均值，把它与这 n 个值比较，查明其中哪一个最精确.

61. 设地球仪上的地区及其图象在与 x 轴（通过水盆和地球仪切点的公共轴）于 a、b（垂直）相交的平面上的纬线之间（图 80）. 若区间 Δx 充分小，则图形 $DEGF$ 和 $D'E'G'F'$

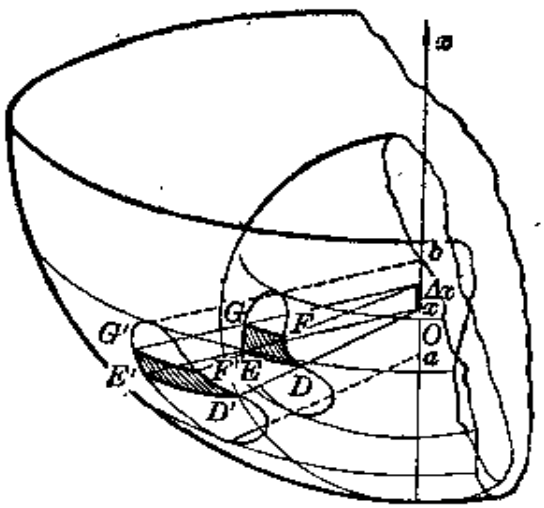


图 80

可以看作由经线所界的球面区域的元素(图 81). 于是, 图形 $DEGF$ 和 $D'E'G'F'$ 的面积可以表示为

$$S_{DEGF}=\frac{2\pi r\varphi(x)\Delta x}{2\pi}=r\varphi(x)\Delta x,$$

$$S_{D'E'G'F'}=\frac{2\pi R\varphi(x)\Delta x}{2\pi}=R\varphi(x)\Delta x,$$

其中 r 和 R 分别是地球仪和盆的半径,

$$\varphi(x)=\angle DxE=\angle D'xE'$$

是 x 的函数, 它定义在 x 轴的区间 $[a,\ b]$ 上.

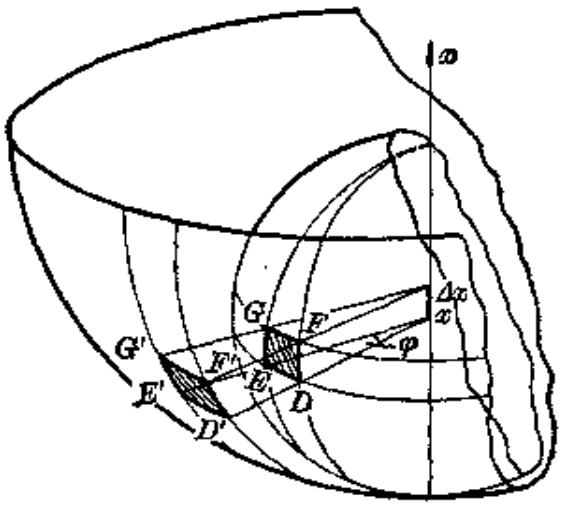


图 81

对表达式 $R\varphi(x)\Delta x$(曲面元素的面积)关于 x 从 a 到 b 积分后, 我们得到映射到盆上的区域的面积 P', 而地球仪上地区的面积, 可由对 $r\varphi(x)\Delta x$ 关于 x 在同一区间上积分得到:

$$P'=\int_a^b R\varphi(x)dx=R\int_a^b\varphi(x)dx,$$

$$P=\int_a^b r\varphi(x)dx=r\int_a^b\varphi(x)dx.$$

由于两者积分号下是同一个函数, 所以两个积分相等,

$$P'/P=R/r.$$

对于地球仪上的任何地区和它在水盆上的投影，我们得到同样的面积比.

62. 显然，顶点处分布着网袋结点的立方体，可以作为所求的最大球的内接立方体来考虑. 用通过立方体两条相交的主对角线的平面，把这个球切开(图82)，结果得到球的截面——大圆，以及立方体的截面——边长为 a 和 $a\sqrt{2}$ 的矩形. 由于连接球面上两点的最短线是大圆弧，所以连接点 A、B 的细线应当与上面所作截面上的大圆弧 AB 重合. 我们来计算大圆的半径.

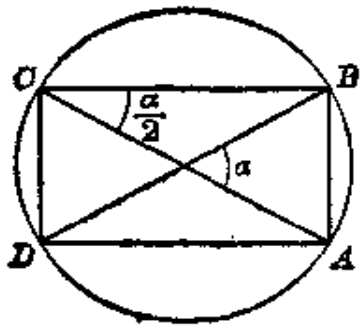


图 82

设 α 是对角线 AC 和 BD 之间的夹角，则

$$\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/\sqrt{2},$$

$$\alpha=2\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{2}).$$

由于弧 AB 长 10 cm，所以从关系式 $\alpha=\overset{\frown}{AB}/r$ (r 是球的半径)得

$$r=\frac{10}{2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

由此，

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{10}{2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^3=\frac{500\pi}{3\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}$$

$$\approx 2245(\text{cm}^3).$$

63. 接到命令时，军舰的位置如图 83 所示.

我们暂时不管军舰 B，考虑要在最短时间内集中到一处，应该如何移动 A 舰和 C 舰. 显然，这两艘军舰应该彼此沿直线 AC 行驶. 它们在 D 点相遇，并且

$$AD:CD=v_a:v_c.$$

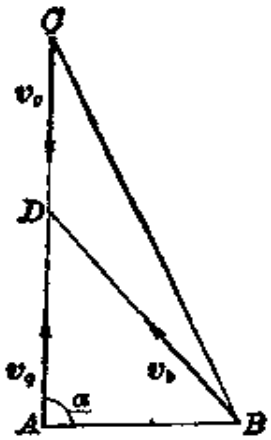


图 83

我们要证明，在 A 舰和 C 舰到达 D 点之前，B 舰也来到 D 点. 当然，这也就证明了它们的会合地点应该是 D.

我们有

$$AD:CD=v_a:v_c,\ AD+CD=AC.$$

解关于 AD 和 CD 的这两个方程，得

$$AD=\frac{v_a}{v_a+v_c}AC,\ CD=\frac{v_c}{v_a+v_c}AC.$$

因而，接到命令后通过时间

$$t=\frac{AD}{v_a}=\frac{AC}{v_a+v_c}$$

A 和 C 相遇.

在这期间，B 舰能行驶的距离为

$$\frac{AC}{v_a+v_c}v_b.$$

为了解决这个问题，只要证明

$$BD<\frac{AC}{v_a+v_c}v_b. \tag{1}$$

由 $\triangle ABC$，用余弦定理得

$$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}.$$

由 $\triangle ABD$ 得

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos\alpha$$

$$=AB^2+\frac{v_a^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2-2AB\frac{v_a}{v_a+v_c}AC\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$$

$$=AB^2\left(1-\frac{v_a}{v_a+v_c}\right)+AC^2\frac{v_a}{v_a+v_c}\left(\frac{v_a}{v_a+v_c}-1\right)+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2$$

$$=\frac{v_c}{v_a+v_c}AB^2+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2-\frac{v_av_c}{(v_a+v_c)^2}AC^2.$$

我们必须证明，不等式(1)成立，即

$$\frac{v_c}{v_a+v_c}AB^2+\frac{v_a}{v_a+v_c}BC^2-\frac{v_av_c}{(v_a+v_c)^2}AC^2<\frac{v_b^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2$$

成立. 上式两边除以 $\frac{v_b^2}{(v_a+v_c)^2}AC^2$ 得

$$\frac{v_c(v_a+v_c)}{v_b^2}\left(\frac{AB}{AC}\right)^2+\frac{v_a(v_a+v_c)}{v_b^2}\left(\frac{BC}{AC}\right)^2-\frac{v_av_c}{v_b^2}<1. \quad (2)$$

把本题的已知数据代入上式左边，此式确实是成立的：

$$\frac{12(15+12)}{20^2}\left(\frac{100}{200}\right)^2+\frac{15(15+12)}{20^2}\left(\frac{220}{200}\right)^2-\frac{15\cdot12}{20^2}$$

$$=\frac{12\cdot27}{20^2\cdot4}+\frac{18\cdot27\cdot11^2}{20^2\cdot10^2}-\frac{15\cdot12}{20^2}$$

$$=\frac{81\cdot20+81\cdot11^2-15\cdot12\cdot20}{20^3}$$

$$=\frac{1620+9801-3600}{20^3}=\frac{7821}{8000}<1.$$

64. 伪钱币的问题属于可以用信息论方法解决的问题. 在这里我们只想指出，2是(本题条件下得到的)确定假钱的最少称量次数. 事实上，最少称量次数 k 与钱币总数 N 由公式

$$k=\left[\frac{\log(2N+1)}{\log 3}\right]$$

联系，其中[x]表示数x的整数部分，即不超过x的最大整数①．在这个问题里$N=4$，因而$k=2$.

我们转到本题．以A、B、C、D表示钱币，它们的重量分别是a、b、c、d．第一次称时，在天平的一个盘上放A和B，在另一个盘上放C和5克重的砝码．这时有两种情形.

1．平衡．因而$a+b=c+5$．假的应是D．在第二次称时，把D放在天平的一个盘上，而砝码或另三个钱中随便取哪个放在另一个盘上．我们可以确定，假钱比真的重还是轻.

2．不平衡．因而$a+b\neq c+5$，并且D的份量是足的，而假的是A、B、C中的一个．在第二次称时，我们在天平的一端放上A，另一端放B．如果重量相等，那末假的是C，并且在$a+b>c+5$时，假的比真的轻，而$a+b<c+5$时，假的比真的重．如果重量不等($a\neq b$)，则说明假的是A或B．若$a+b<c+5$，且$a<b$，则A是假的(比真的轻)．若$a+b<c+5$，而$a>b$，则B是假的(也比真的轻)．若$a+b>c+5$，$a>b$，则A是假的(比真的重)．最后，若$a+b>c+5$，$a<b$，则B是假的(也比真的重).

65②．设G是联系四个城市的任意道路网．G可以作为网络来研究，此网络的顶点对应于城市和叉路口，它的弧对应于顶点之间的各段道路.

设G有$i+2$个叉路口，n和m表示G的顶点数和弧数，则

$$n=6+i.$$

---

① 参见A. M. 雅格洛姆，И. M. 雅格洛姆《概率与信息》(吴茂森译，上海科技出版社)第106页，问题25．——译者

② 参见姜伯驹著《一笔画和邮递路线问题》，人民教育出版社，1964年版．——译者

由于从每个城市至少有一条弧出发，而从每个交叉口至少有3条弧出发，所以下面的不等式成立

$$m \geqslant \frac{1}{2}[4+3(i+2)] = 5+\frac{3}{2}i.$$

G 是连通的. 我们引进新记号

$$\nu(G) = m-n+1.$$

从上面所说的不等式及 $n=6+i$ 可得，$\nu(G) \geqslant i/2$. 这就是，若 G 的分支点(交叉口)多于2个，那末 G 包含闭圈. 但包含闭圈的网络不满足费用最经济的要求，因为，去掉圈的一条弧(取消闭圈)后，我们得到经济得多的、连接同样四个城市的道路网.

66. 各台机器上能达到最大生产率的是：第I台是 C，第II台是 E，第V台是 D.

女裁缝 C 也可以被录用在第III台机器上工作(她的生产率是12兹罗提)，但这样一来，第I台机器要交给 D(生产率11兹罗提). 由于第I台机器生产率变了，男裁缝这时损失 $15-11=4$ 兹罗提，因此他最好是让 F 上第III台机器(生产率11兹罗提)，这时，他在第III台机器上仅损失 $12-11=1$ 兹罗提.

第IV台机器上最高生产率也是女裁缝 C 达到的. 但是，象刚才对第III台机器的讨论一样，可以发现最好是委托给 G.

这样，我们得到被录用的女裁缝与机器的下列安排：

$$\text{I}—C,\ \text{II}—E,\ \text{III}—F,\ \text{IV}—G,\ \text{V}—D.$$

这时，这家店的生产率是 $15+10+11+10+14=60$ 兹罗提，这比起第III、IV台机器的女裁缝，以 C 的生产率工作所能达到的生产率(62兹罗提)少不了多少.

67. 这一类问题叫运动竞赛问题，现在是博奕论的一个特殊部分.

我们介绍两种解法：第一种是初等的，第二种用了微分方程论的最简单的方法. 把不同的方法比较一下不是没有价值的，对某些读者来说显然是有益的.

解法一：走私者脱离包围所能采取的策略，例如，可以始终沿通过正六边形(它的顶点在开始时分布着警察的汽艇)任一边中点的直线驾驶摩托艇开去.

设 O 是正六边形的中心，它是摩托艇的位置. 又设 A、B 是此六边形的顶点，它们是警察汽艇占有的位置(图 84). 接到命令后，警察 A 始终严格地向摩托艇前进，因此他的汽艇画出了某条弧 AA'. 如果汽艇沿线段 AS 运动，这里，S 是等边三角形 AOB 的中心，那末他走的路比 AA' 弧要短得多. 但即使如此，我们证明走私者也能逃脱追捕. 显然，$v_a=4/5\,v_0$，这里 v_a 是汽艇速度，v_0 是摩托艇速度. 如果走私者在 S 点，则警察位于线段 AS 上的 A_1 处，它距 A 点 $4/5\,AS$(图 85). 设在 A_1 处警察选定了最好的策略：使自己的汽艇抢先占到 C 点而截获走私者的摩托艇. 显然，如果能这样的话，将有 $A_1C=4/5\,SC$. 把 A_1S 的长度记为 x，并对 $\triangle A_1SC$ 应用余弦定理，得

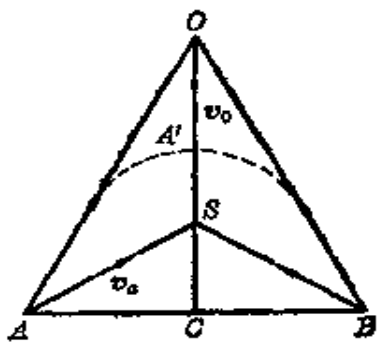


图 84

$$\left(\frac{4}{5}SC\right)^2=SC^2+x^2-2SC\cdot x\cdot\frac{1}{2}$$

或

$$x^2-SC\,x+\frac{9}{25}SC^2=0.$$

因为这个二次方程的判别式是负的：

$$\Delta = SC^2 - \frac{36}{25} SC^2 < 0,$$

所以警察抓不到走私者.

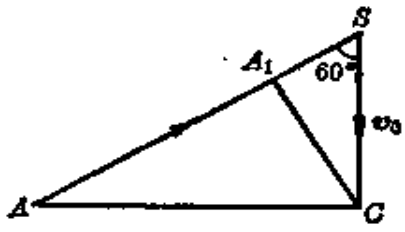


图 85

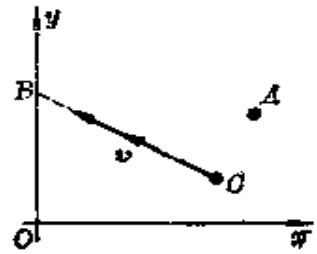


图 86

解法二：设 t 表示时间. 设 $t=0$ 时走私者的摩托艇在坐标原点，警察的汽艇在点 $A(x_0, y_0)$，而走私者沿 Oy 轴运动(图 86). 在时刻 t，走私者在点 $(0, 25t)$ 处，警察在某个点 $C(x, y)$. 设

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

是汽艇的运动方程，则 $\boldsymbol{V} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$，其中 $\dot{x} = dx/dt$，$\dot{y} = dy/dt$ 是汽艇的速度向量. 显然，$\boldsymbol{V} /\!/ \boldsymbol{CB}$. 但向量 $\boldsymbol{CB} = (O-x, 25t-y)$，因而

$$\frac{\dot{x}}{-x} = \frac{\dot{y}}{25t-y}$$

或

$$\dot{x}(y-25t) = \dot{y}x. \tag{1}$$

根据条件，$|\boldsymbol{V}| = 20$ 节，因此

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 20. \tag{2}$$

考察方程(1)和(2). 我们引进一个新记号 $u = x/(y-25t)$，那末 $y-25t = x/u$，方程(1)成为

$$-\dot{x}x/u = \dot{y}x \tag{3}$$

或

$$\dot{x}/u=\dot{y}. \tag{4}$$

同样地，方程(2)成为

$$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{x}^2/u^2}=20,$$

或

$$\pm\dot{x}\sqrt{1+1/u^2}=20, \tag{5}$$

其中的符号取得使 $\pm\dot{x}\sqrt{1+1/u^2}>0$. 由于 $y-25t=x/u$，所以

$$dy-25dt=\frac{udx-xdu}{u^2},$$

由此

$$\dot{y}-25=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}$$

或

$$\dot{y}=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}+25.$$

把上式代入方程(4)得

$$\dot{x}u=\frac{u\dot{x}-x\dot{u}}{u^2}+25,$$

或

$$\frac{x\dot{u}}{u^2}=25,$$

$$\dot{u}=\frac{25u^2}{x}. \tag{6}$$

把(5)的两边分别除以(6)的两边，得

$$\pm\frac{\dot{x}}{\dot{u}}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}=\frac{20x}{25u^2}.$$

但 $\dot{x}/\dot{u}=dx/du$，因而 $\pm dx\sqrt{1+1/u^2}/du=4x/5u^2$，$dx/x=\pm 4du/5u\sqrt{u^2+1}$ 或

$$\int\frac{dx}{x}=\pm\frac{4}{5}\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+1}}.$$

计算这两个积分得

$$\ln c|x| = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u}\right|,$$

其中 c 是任意常数. 这样,

$$cx = \pm\frac{\sqrt{u^2+1}-1}{u}.$$

或 $cxu = \pm(\sqrt{u+1}-1)$. 我们把常数 c 的符号选得使 $cxu = \sqrt{u^2+1}-1$. 以 $u=x/(y-25t)$ 代入之, 得

$$\frac{cx^2}{y-25t} = \frac{\sqrt{x^2+(y-25t)^2}}{\pm(y-25t)} - 1,$$

由此

$$cx^2 = \sqrt{x^2+(y-25t)^2} \mp (y-25t),$$

或

$$cx^2 \pm (y-25t) = \sqrt{x^2+(y-25t)^2}.$$

两边平方得

$$c^2x^4 \pm 2cx^2(y-25t) = x^2,$$

或(约去 x^2)

$$c^2x^2 \pm 2cx\frac{dy}{dx} = 1.$$

显然, 这个方程里 $c \neq 0$, 否则将有 $0=1$. 因而

$$dy = \frac{1-c^2x^2}{\pm cx}dx,$$

$$y = \pm\int\frac{1-c^2x^2}{cx}dx = \pm\frac{1}{2c}\ln|x| \mp \frac{c}{4}x^2 + c_1.$$

当 $x \to 0$ 时, $y \to \infty$. 由此得出结论: 警察的汽艇无论如何也不会达到 Oy 轴, 也就是说, 抓不到走私者.

在把方程变形时约去了 x^2. 若 x 恒等于 0, 即 若点始终在 Oy 轴上, 那末这个运算是不可能的. 但我们总能把坐标轴取得使在 Oy 轴上, 当 $t=0$ 时, 一艘警察的汽艇都没有.

从上述解法可知, 只要不朝着警察的汽艇走, 沿直线向任

何方向行驶，走私者都能逃脱追捕.

68. 宇航员在 P_0 点着陆，前往 P_1 点，又从 P_1 点去点 $P_2 \neq P_0$. 因而，P_2 离 P_1 比 P_0 离 P_1 还要远：

$$P_0P_1 < P_1P_2. \tag{1}$$

当继续往前走时，每走一段都不比前一段短：

$$P_1P_2 \leqslant P_2P_3 \leqslant P_3P_4 \leqslant \cdots \leqslant P_{n-1}P_n. \tag{2}$$

如果第 n 段末宇航员返回 P_0，那末由(1)、(2)不等式

$$P_0P_1 < P_{n-1}P_0$$

成立. 这与 P_1 是距 P_0 最远的点矛盾.

69. 矿湖问题与所谓星形集的理论有关.

一般说来，星形集不是凸集，但它至少有一个点，连接此点与该集所有点的线段均属于该集. 矿湖问题归结为证明具有上述性质的点的集是凸集.

设 Σ 为湖面上可以看到整个湖的点的集，这些点记为 $A, B, C, \cdots$. 需要证明，若 $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, C 在线段 AB 上，则 $C \in \Sigma$.

设 P 是湖面上任一点. 我们证明从 C 点看得见 P 点. 因为 $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, 故线段 AP 和 BP 整个地通过湖，没有一处通过陆地（图 87）. 点 C 在点 A、B 之间，因而线段 CP 在 $\triangle ABP$ 内. 现在，设从 C 点看不见 P 点. 此时，在线段 CP 上应该有不属于湖面的某个点 Q. 但此时 Q 点将挡住线段 BQ 延长线上的点，而且从 B 看不见 AP 与 BQ 的延长线的交点 R. 这与 $B \in \Sigma$ 矛盾. 所以，从点 C 看得见湖面上的任何

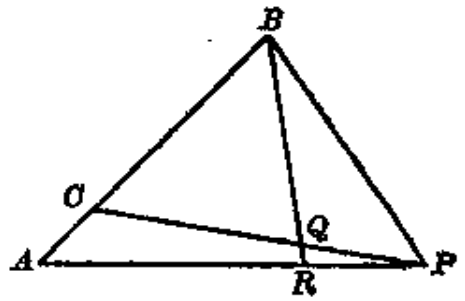


图 87

一点.

70. 本题所说的两张地图是相似矩形 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$，并且点 A 对应 A'，点 B 对应 B' 等等.

若 $AB \parallel A'B'$，则两个矩形位似(在图 88 上表示正位似，图 89 是反位似). 这时，学校的和透明纸上的对应于同一地点的两个点(且只有两个)，与位似中心 O 重合. O 点是直线 AA' 和 BB' 的交点.

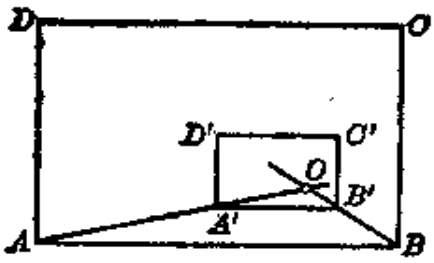


图 88

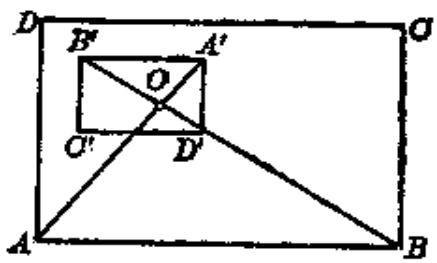


图 89

如果把幕本绕位似中心转动到(关于学校地图下边缘的)某个倾斜位置，则两张地图不再位似，但仍相似.

设幕本斜放在学校的地图上，我们打算找一个点 O，它既是幕本的转动中心，同时又是原来位置($AB \parallel A'B'$ 时)的位似中心.

直线 AB 和 $A'B'$(图 90)在 E 点相交，直线 CD 和 $C'D'$ 交于 F 点. AD 和 $A'D'$ 交于 G，BC 和 $B'C'$ 交于 H. EF 和 GH 交于所求的点 O.

我们来证明这个结论. 设 $AB=a$，$A'B'=a'$，$BC=b$，$B'C'=b'$. 显然

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=s,$$

这里，s 是相似系数.

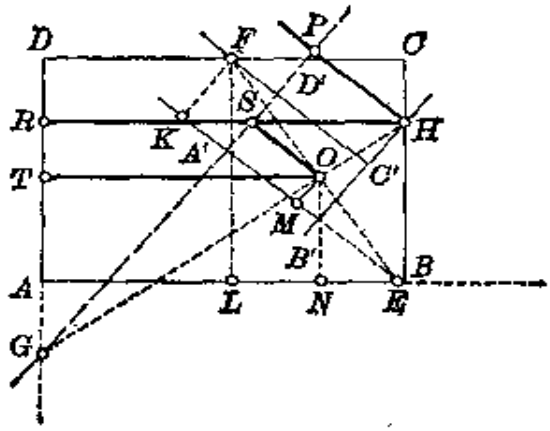


图 90

其次，$OM \perp A'B'$，$FK \perp A'B'$，并且点 M 和 K 在 $A'B'$ 上．此外，$ON \perp AB$，$FL \perp AB$，并且点 N 和 L 在 AB 上．

因为 $\triangle NOM$ 和 $\triangle LFK$ 位似（F 是位似中心），所以

$$\frac{OM}{ON}=\frac{FK}{FL}=\frac{b'}{b}=s.$$

不难看出，$OS \perp A'D'$，$HP \perp A'D'$，点 S 和 P 在 $A'D'$ 上．类似地，$OT \perp AD$，$HR \perp AD$，点 T 和 R 在 AD 上．

$\triangle TOS$ 和 $\triangle RHP$ 位似（G 是位似中心），所以

$$\frac{OS}{OT}=\frac{HP}{HR}=\frac{a'}{a}=s,$$

而由于

$$\frac{OS}{OT}=\frac{OM}{ON},$$

所以

$$\frac{OS}{OM}=\frac{OT}{ON}.$$

从最后一个等式知道，O 是所求的点．

71．在图 91 上画出了细线的初始位置（$ABCD$）及偏离轴截面的位置（$ABC'D'$）．设 $\alpha=\angle DOD'=\angle COC'$（图 92），

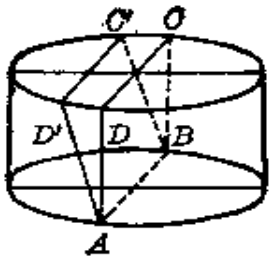


图 91

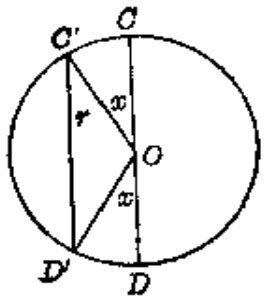


图 92

则 $D'C'=2r\cos x$. 弧 DD' 等于 rx, 而线段 $AD'=BC'=r\sqrt{1+x^2}$.

细线在初始位置 $ABCD$ 的长度等于 $6r$, 而在偏离位置 $ABC'D'$ 的长度等于

$$2r+2r\sqrt{1+x^2}+2r\cos x=2r(1+\cos x+\sqrt{1+x^2}).$$

考虑这两个量的差

$$\begin{aligned} y(x)&=6r-2r(1+\cos x+\sqrt{1+x^2})\\ &=2r(2-\cos x-\sqrt{1+x}). \end{aligned}$$

如果我们能证明 $y(x)$ 的值总大于 0, 那末细线就可以既不解开也不拉断地从罐头上取下.

我们指出, 当 $0<x<\pi/2$ 时, 函数 $y(x)$ 的导数是正的, 即

$$y'=\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

事实上, 设 $x=\operatorname{tg}\alpha$, 则

$$\sin\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

但对所有 α, 不等式

$$\alpha<\operatorname{tg}\alpha=x$$

成立, 所以对 $0<\alpha<x<\pi/2$ 有

$$\sin\alpha<\sin x,$$

或 $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}<\sin x.$$

所以，$0<x<\pi/2$ 时有

$$\sin x-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}>0.$$

这样，函数 $y(x)$ 在区间 $[0,\ \pi/2]$ 上单调增，当 $x=0$ 时取得极小值，当 $x=\pi/2$ 时取得极大值：

$$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2r\left(2-\sqrt{1+\frac{\pi^2}{4}}\right)>0.$$

这就是说，在初始位置与偏离位置，细线长度之差总是正的，所以无需解开或拉断就可把它从罐头上取下来.

如果不考虑摩擦，细线在初始位置的平衡是不稳定的.

72. 变元 X 和 Y 可取四个值 O、A、B、AB. 因而，总共可以写出16个关系式 $X\to Y$，其中有一些根据法则 I～III 是真的，另一些根据法则 IV 是假的. 在法则 I～III 中，以四个可能的值代 X，得到下列真关系式：$O\to O$，$O\to A$，$O\to B$，$O\to AB$，$A\to A$，$A\to AB$，$B\to B$，$B\to AB$，$AB\to AB$. 其余的（$A\to O$，$A\to B$，$B\to O$，$B\to A$，$AB\to O$，$AB\to A$，$AB\to B$）根据法则 IV 是假的. 由此直接得知，法则 I～IV 是不矛盾的，因为从它们不会推出两个相互排斥的关系式. 完全一样地可以确信，从法则 I～IV 可得关系式 $\overline{A\to B}$（因为 $A\to B$ 假）.

剩下来还要证明关系"$\to$"的传递性，即从 $X\to Y$ 和 $Y\to Z$ 得 $X\to Z$. 因为变元 X、Y、Z 都只取四个值，所以考察血型 O、A、B、AB 的全部组合，可以证明关系$\to$的传递性.

若 $X=O$，则 Y 和 Z 都可以取使 $Y\to Z$ 成立的任意值. 根据法则 III，$O\to Z$ 对任何 Z 真，因而 $X=O$ 时关系$\to$是传

递的.

现在证明 $X \neq O$ 时$\rightarrow$的传递性.

若 $X=A$, 则可有三种情形: $(a)\ Y=A,\ Z=A$; $(b)\ Y=A,\ Z=AB$; $(c) Y=AB,\ Z=AB$. 由此得到三个命题:

(a) 若 $A\rightarrow A,\ A\rightarrow A$, 则 $A\rightarrow A$;

(b) 若 $A\rightarrow A,\ A\rightarrow AB$, 则 $A\rightarrow AB$;

(c) 若 $A\rightarrow AB,\ AB\rightarrow AB$, 则 $A\rightarrow AB$.

从法则 I、II 可知这三个命题都是真的. 类似地可以证明 $X=B$ 时$\rightarrow$的传递性, 只要在上述命题中以 B 代替 A (符号 AB 不动).

最后考虑 $X=AB,\ Y=AB,\ Z=AB$ 的情形, 相应的命题是:

若 $AB\rightarrow AB,\ AB\rightarrow AB$, 则 $AB\rightarrow AB$.

这显然是真的.

这样, 本题已完全解决.

78. 解释大学生得到的结论是简单的: 第三个大学生的血型是 A 或 B.

我们证明, 如果第三个大学生的血型是 A, 那末用它的血能鉴定任何病人的血型 X. 事实上, 检验他和病人 X 的血可以有四种情形:

(1) $A\rightarrow X,\ X\rightarrow A$, (2) $A\rightarrow X,\ (\overline{X\rightarrow A})$;

(3) $(\overline{A\rightarrow X}),\ X\rightarrow A$; (4) $(\overline{A\rightarrow X}),\ (\overline{X\rightarrow A})$.

(横线表示否定)

在第一种情形, 从 $A\rightarrow X$ 得 $X\neq B,\ X\neq O$, 而从 $X\rightarrow A$ 得 $X\neq AB$, 因此 $X=A$.

在第二种情形, 从 $A\rightarrow X$ 得 $X\neq B,\ X\neq O$, 而从 $\overline{X\rightarrow A}$ 得 $X\neq O,\ X\neq A$, 因此 $X=AB$.

在第三种情形，从 $\overline{A\to X}$ 得 $X\neq A$，$X\neq AB$，而从 $X\to A$ 得 $X\neq B$，因此 $X=O$.

最后，在第四种情形，从 $\overline{A\to X}$ 得 $X\neq A$，$X\neq AB$，而从 $\overline{X\to A}$ 得 $X\neq O$，$X\neq A$，因此 $X=B$.

这样，在各种情形，只要用血型 A 就能确定病人的血型. 类似地可以证明用 B 型血鉴定任何血型的可能性.

现在证明，本题的全部条件，只适用于第三个医科大学生的血是 A 或 B 型. 事实上，设 X、Y、Z 是三个大学生的血型. 检查 X 和 Y 的血，学生们能得到下述四个结论之一：

(1) $X\to Y$，$Y\to X$；　(2) $X\to Y$，$(\overline{Y\to X})$；

(3) $(\overline{X\to Y})$，$Y\to X$；　(4) $(\overline{X\to Y})$，$(\overline{Y\to X})$.

在第一种情形，两个关系式只在 $X=Y$ 时真. 因而，这时学生们不能鉴定自己的血型.

在第二种情形，从 $\overline{Y\to X}$ 得 $Y\neq X$，$X\neq AB$，$Y\neq O$. 其次，由于应该有 $X\to Y$，所以只能有 $X=O$，$Y=AB$.

类似地，在第三种情形只允许 $Y=O$，$X=AB$.

最后，在第四种情形，从 $\overline{X\to Y}$ 得 $X\neq Y$，$X\neq O$，$Y\neq B$；其次，从 $\overline{Y\to X}$ 得 $X\neq AB$，$Y\neq O$. 与第一种情形一样，两个大学生不能鉴定自己的血型，因为既可能 $X=A$，$Y=B$，又可能 $X=B$，$Y=A$.

因此，头两个学生只有在一个人是 O 型，另一个人是 AB 型时才能鉴定自己的血型.（扩大检查范围，把第三个大学生包括进去也不会改变这个结论. 因为，根据问题的条件，不能鉴定第三个大学生的血型，从而扩大检查的结果只能是第一和第四种情形，不能鉴定头两个学生的血型.）

这样，设 $X=O$，$Y=AB$. 第三个学生不能是 O 型血，因为，如果是 O 型的话，检查 Y 和 Z 的血，学生们就得到了第

二或第三种情形①里指出的结论，从而能确定 Z 的血型. 第三个学生也不能是 AB 型血，否则，检查 X 和 Z 的血，学生们仍得到第二或第三种情形里的结论.

最后，设第三个大学生的血型 Z 是 A 或 B. 把三个人的血一起检查，我们发现 $O\to Z$，$\overline{Z\to O}$. 因此，$Z\neq O$，$Z\to AB$，$\overline{AB\to Z}$，从而 $Z\neq AB$. 这样一来，$Z=A$ 或 $Z=B$，无论用什么方法，都不能确定这两种可能性中哪一种符合实际情形.

74. 答：姐妹不能代替母亲输血给两兄弟.

我们证明这个结论.

两兄弟都不会是 O 型血(因为，有 O 型血的人可输血给另一个)，也不能是 AB 型(因为，有 AB 型血的人可以毫无危险地接受另一个输的血)，因而，他们两人一个是 A 型，一个是 B 型.

由于母亲可以输血给他们两人，所以她的血只能是 O 型. 其次，从血型的遗传性可知，他们的父亲必定是 AB 型血，否则，他的儿子不可能是 A 型或 B 型血. 同样地，根据遗传性定律，与两兄弟同父母的姐妹的血型也应该是 A 或 B. 事实上，根据本题中所说的规则，我们知道，母亲的血型是 OO，父亲的是 AB，可能的血型组合只是 OA 或 OB，即 A 或 B.

因而，有血型 A 或 B 的姐妹只能代替母亲输血给两兄弟之一.

75. (1) 把边长为 10 cm 的 65 个方块象图 93 所示那样放置. 此时，$OA^2=OA_1^2+AA_1^2=2250<50^2$，$OB^2=OB_1^2+BB_1^2=2250<50^2$，$OC^2=OC_1^2+CC_1^2=2450<50^2$，$OD^2=OD_1^2+DD_1^2=2450<50^2$. 用这种方法放置方块时，半径为 50 cm

① 在假设 $X=O$，$Y=AB$ 时，如果 $Z=O$，检查 Y、Z 的血时只能出现第二种情形，如果 $Z=AB$，检查 X、Z 的血只能出现第三种情形. ——译者

的圆能放的不止 64 块，连 65 块也能放，所以这个圆不是包含 64 个方块的半径最小的圆.

(2) 在半径为 50 cm 的圆内，能放置边长为 10 cm 的 67 个方块. 如图 94 那样. 事实上，

$$OA^2=OA_1^2+AA_1^2=2425<50^2,$$
$$OB^2=OB_1^2+BB_1^2=2500=50^2,$$
$$OC^2=OC_1^2+CC_1^2=2500=50^2,$$
$$OD^2=OD_1^2+DD_1^2=2425<50^2.$$

76. 在半径为 20 cm 的圆内，可放置 8 块边长为 10 cm 的方块(图 95).

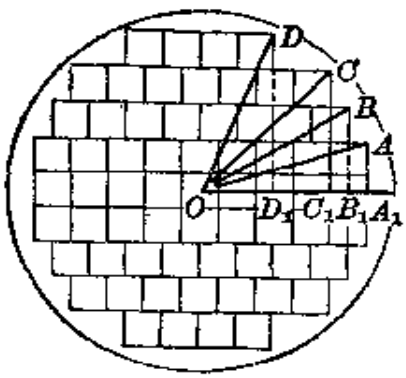


图 93

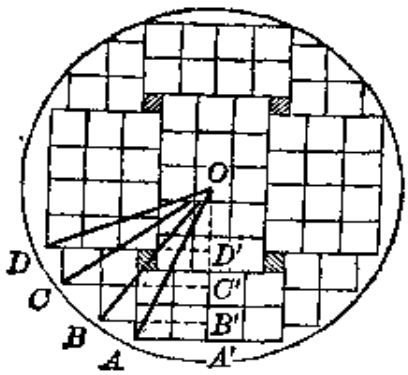


图 94

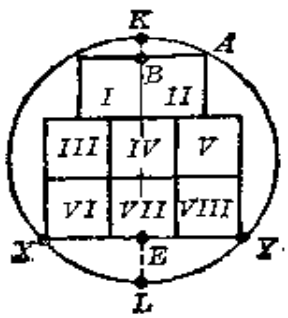


图 95

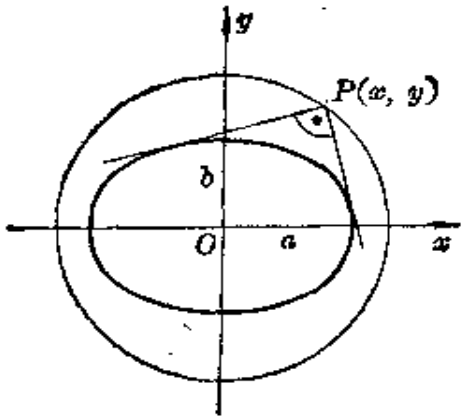


图 96

点 B 和 E 在直径 KL 上，点 A 是正方形 II 的顶点，点 X 和 Y 是弦的端点，这弦垂直于直径 KL，并通过正方形 VII 的底边上的点 E.

从 $\triangle AKL$ 可得，

$$AB=\sqrt{BK\cdot BL} \text{ 或 } AB=\sqrt{BK\cdot(40-BK)}=10,$$

由此，$BK=10(2-\sqrt{3})$. 因而，$EL=10-BK=10(\sqrt{3}-1)$，$EK=30+BK=50-10\sqrt{3}$. 从 $\triangle KLX$ 得

$$EX=\sqrt{EK\cdot EL}=10\sqrt{(5-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}$$
$$=10\sqrt{6\sqrt{3}-8},$$

由此，
$$XY=20\sqrt{6\sqrt{3}-8}\approx 30.9.$$

这样一来，邻接的正方形 VI、VII、VIII 的底边之和小于弦 XY.

77. 我们在塔（和栅栏）的横截面上引进直角坐标系（图 96），它的原点与圆（栅栏的截面）心重合. 我们证明，塔的水平截面是半径为 $a=4m$，$b=3m$ 的椭圆.

我们写出通过圆上一点 $P(X, Y)$ 与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相切的直线方程. 通过点 $P(X, Y)$ 的直线方程是 $y-Y=m(x-X)$ 或

$$y=mx+(Y-mX). \tag{1}$$

从解析几何知道，使方程为 $y=mx+n$ 的直线与椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相切，只要下面的条件成立：

$$b^2+a^2m^2-n^2=0. \tag{2}$$

从(1)、(2)得

$$b^2+a^2m^2-(y-mX)^2=0. \tag{3}$$

解方程(3)，得到所求切线斜率的两个值. 根据本题条件，需要使塔截面的两条切线之间的夹角是直角（图 96），也就是要

使 $m_1m_2=-1$，这里的 m_1 和 m_2 是方程(3)的根．把这个方程变形为

$$(a^2-X^2)m^2+2XYm+(b^2-Y^2)=0.$$

根据韦达定理，

$$m_1m_2=\frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}.$$

因而，使椭圆的两条切线之间的夹角为直角，必要充分条件是

$$\frac{b^2-Y^2}{a^2-X^2}=-1,$$

或

$$X^2+Y^2=a^2+b^2.$$

这样，从半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$、圆心为坐标原点的圆上任何一点，看椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 的水平视角为直角．

本题中，$a=4$，$b=3$，因而 $r=\sqrt{a^2+b^2}=5$．问题的条件是完全满足的．

78．我们讲两种解法．

1．在任何时刻，板都绕着大木头横截面边界上的某个点转动，所以在板的端点所画的线上，每个点的切线应该与这个点所对应的板的位置形成直角．如果板的端点描出直线，那末板只能平移而不能成为跷跷板．

因此，板的端点的轨迹不会是直线．

2．不失一般性，可以假定大木头的横截面是凸的(如果它不是凸的，那末我们应该考虑它的凸包①)．板的端点的轨迹是大木头横截面的渐屈线(横截面的边界，是板的端点所描曲线的曲率中心的轨迹，即渐伸线)．但曲线的渐屈线不可能是直线(因为直线的渐伸线的点是无限远的)．这个结论的精确证明可以在微分几何教科书中找到．

① 包含集 E 的最小凸闭集叫 E 的凸包。——译者

79. 如果默认汽油和煤油的密度不同，那末从问题的条件推知，3.5 公升煤油重 3 公斤，5 公升汽油重 4 公斤. 因此，煤油的密度是 $3/3.5=6/7$（公斤/公升），汽油的密度是 $4/5$（公斤/公升）. 知道了这两种燃料的密度，不难计算借来的（以及归还的）混合物的体积是 8.5 公升，重 7 公斤，密度是 7:8.5 公斤/公升.

但萨拉杰克博士断言，司机们不善于区分煤油和汽油. 由此可得，"汽油"和"煤油"的密度可以是相同的. 把未知的密度记为 x，我们得到方程

$$3+5x=3.5x+4,$$

因而 $x=2/3$. 这样一来，对司机们不满意的萨拉杰克博士，能从有相同密度的汽油和煤油得到密度不过是 0.667 公斤/公升的混合物，它比原来的两桶混合物要轻得多.

这个问题也可以通过另一条途径解决. 把煤油密度记为 x，汽油密度记为 y，由题设得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x}+5=3.5+\dfrac{4}{y},\\ 3+5y=3.5x+4.\end{cases}$$

对其中一个方程解出 y 并代入另一个方程，得到 x 的二次方程

$$21x^2-32x+12=0.$$

这样，问题有两解：$x_1=6/7$，$y_1=4/5$；$x_2=2/3$，$y_2=2/3$. 第一组解是司机所用的混合物，第二组解是萨拉杰克所说的混合物.

注 有一位读者注意到，萨拉杰克博士说的结论，现代汽车发动机不用这样重的混合燃料是不对的，狄塞尔发动机（柴油机）用密度从 0.85 到 0.88 公斤/公升的燃料.

80. 萨拉杰克博士的魔书是以下述原则为基础的.

考虑 10000 对数$(n, nz-[nz])$，这里，$z=(\sqrt{5}-1)/2$是(与"黄金分割"联系在一起的)"黄金数",n是从 1 到 10000 的自然数列，符号$[x]$是数x的整数部分，即不超过x的最大整数. 把这些数偶这样地分布，使它们的第二个数$nz-[nz]$形成增列，然后，按照这种次序写出每个数偶对应的第一项n，所得的表叫"铁数"表.

例如，我们对$n=10$，即对自然数 1 到 10 作铁数表.

设$\sqrt{5}\approx 2.236$，则$z=(\sqrt{5}-1)/2\approx 0.618$. 对这 10 个数有：

n	$nz-[nz]$	n	$nz-[nz]$
1	0.618	6	0.708
2	0.236	7	0.326
3	0.854	8	0.944
4	0.472	9	0.562
5	0.090	10	0.180

$nz-[nz]$这一列中最小的数是 0.090，因而，对头十个自然数构造的铁数表，它的第一个位置应该放 5，然后是 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8.

这样一来，自然数列从 1 到 10 这一段的铁数表是：

5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8.

类似地，对自然数列随便多长的一段可以构造铁数表.

任何一张铁数表，不管用哪些数构造它，都有下列性质：相邻两数之差只能取三个值(应为至多取三个值.——译者).

例如，上面这张表里，相邻两数之差是

5, −8, 5, −3, 5, −8, 5, −3, 5.

它只取 5, −8, −3 这三个值.

当从铁数表里去掉所有比任意指定的某个数大的数，或者，去掉所有比任意指定的某个数小的数，或者，去掉任意两个数之间的数时，铁数表的这种性质仍然保持. 例如，在上面所举出的表里去掉比 3 小的所有的数，便得到"缩减的"表

5, 10, 7, 4, 9, 6, 3, 8.

它的相邻项之差仍然只取三个值(只有两个——译者)

5, −3, −3, 5, −3, −3, 5.

萨拉杰克博士珍视的魔书，就是建立在铁数表的这种性质上的.

81. 首先指出，用 10、30、90、270 克这一套砝码能称 10 克到 400 克的任何货物，精确到 10 克:

$10=10$,　　$20=30-10$,
$30=30$,　　$40=30+10$,
$50=90-30-10$,　　$60=90-30$,
$70=90+10-30$,　　$80=90-10$,
$90=90$,　　$100=90+10$,
$110=90+30-10$,　　$120=90+30$,
$130=90+30+10$,　　$140=270-90-30-10$,
$150=270-90-30$,　　$160=270+10-90-30$,
$170=270-90-10$,　　$180=270-90$,
$190=270+10-90$,　　$200=270+30-90-10$,
$210=270+30-90$,　　$220=270+30+10-90$,
$230=270-30-10$,　　$240=270-30$,
$250=270+10-30$,　　$260=270-10$,
$270=270$,　　$280=270+10$,
$290=270+30-10$,　　$300=270+30$,
$310=270+30+10$,　　$320=270+90-30-10$,
$330=270+90-30$,　　$340=270+90+10-30$,

$350=270+90-10$，　　$360=270+90$，

$370=270+90+10$，　　$380=270+90+30-10$，

$390=270+90+30$，　　$400=270+90+30+10$。

另一套 10、20、40、80 和 160 克的砝码，能称 10 克到 310 克的任何货物，精确到 10 克：

$10=10$，　　$20=20$，

$30=20+10$，　　$40=40$，

$50=40+10$，

$60=40+20=80-20=160-80-20$①

$70=80-10$，　　$80=80$，

$90=80+10$，　　$100=80+20$，

$110=80+20+10$，　　$120=80+40$，

$130=80+40+10$，　　$140=160-20$，

$150=160+10-20$，　　$160=160$，

$170=160+10$，　　$180=160+20$，

$190=160+20+10$，　　$200=160+40$，

$210=160+40+10$，　　$220=160+40+20$，

$230=160+40+20+10$，　　$240=160+80$，

$250=160+80+10$，　　$260=160+80+20$，

$270=160+80+20+10$，　　$280=160+80+40$，

$290=160+80+40+10$，　　$300=160+80+40+20$，

$310=160+80+40+20+10$。

杂货铺主人在一个天平盘上，放上顾客所需要的重量的砝码，而在另一个盘上放上，例如一包砂糖，在两边还没有平衡之前，补进或倒出一些糖．为了称货物，铺主可以用第一套砝码，也可以用第二套．不过，第一套对他更方便些，因为用它可以称 10 克到 400 克的食品杂货．用第二套五个砝码，只

① 下面不再列出不同的称法。

能称 10 克到 310 克货物. 为了卖重量在较大范围内的货物，用第一套砝码较好.

对于店主来说，用 10、20、40、80 和 160 克 5 个砝码这一套更便利，原因如下. 店主在一个天平盘上放上，例如顾客挑选的黄瓜，而在另一个盘里应该放上重量等于黄瓜的砝码. 设黄瓜重 100 克，可以在另一个盘上，放上最重的砝码，它显然比黄瓜重. 然后，在放了黄瓜的盘里放 80 克重的砝码，这样，有黄瓜的盘要重. 接着，他把 40 克的砝码放在另一个盘里(结果这边又要下沉)，最后，在有黄瓜的盘里放 20 克的砝码，两个盘达到了平衡. 这种方法能够称 10 到 310 克之间的货物，并精确到 10 克. 如果对 10、30、90、270 克的一套砝码用这种方法，不可能以同样的精确度称 100 克的黄瓜，而只能确定黄瓜的重量小于 140 克. 因此，对于店主来说，用 10、20、40、80、160 克这一套砝码要更便利些.

82. 本题里所有问题的回答都是肯定的.

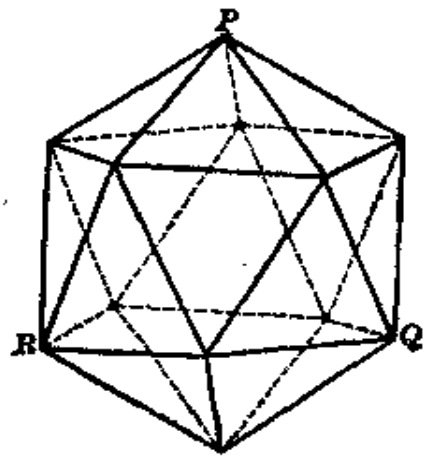


图 97

为了回答第一个问题，我们把这 12 个人的团体的每个成员，想象为正二十面体的一个(且只是一个)顶点. 如果两个人所对应的顶点是由这个正二十面体的棱连接的，那末他们是认得的.

我们断言，本题的条件(1)到(6)都是成立的. 下面一个个地验证.

从正二十面体的每个顶点出发，有五条棱把它与另五个顶点连接，所以每一个成员与 5 个成员熟悉，而不认识另外六个人. 因而条件(1)成立.

属于同一个面的顶点对应于互相认识的三人小组，因而条件(2)也成立.

如果成员中存在彼此认识的四个人，那末在二十面体的顶点中，能够指出由棱两两连接的四个顶点. 显然，彼此认识的四个人里任何三个也彼此认识，因而，所对应的三个顶点属于同一个面. 这样，我们应该找这样的四个顶点，其中每一个都与在同一个面里的三个顶点之间有棱连接. 这样的点在正二十面体中是没有的，所以条件(3)成立.

现在，我们要找三个顶点，它们对应于彼此不认识的三个人. 由于正二十面体的所有顶点是平等的，所以只要找一个这样的由三个顶点组成的小组. 设正二十面体如图97那样放置在空间中. 我们取它最上面的点作为这个小组的第一个顶点. 与这个点以棱连接的各个点不可以作为这个小组的第二、第三个顶点. 从另外六个顶点里，不难选出这样的两个点，无论在它们之间，还是在它们与上面所取的第一个顶点之间，都没有棱连接. 但是，在那六个顶点中，有这种性质的三个点是找不到的. 所以，在成员中找不到四个彼此不认识的人，但总可以找到三个互不认识的人，例如，对应于顶点 P、Q、R(图97)的那些人. 这样一来，条件(4)、(5)成立.

最后，条件(6)成立，因为正二十面体的相对两个顶点，所对应的人没有共同的熟人. 因此，我们所举的例子满足本题的全部条件. 第一个问题已得到回答.

如果我们不是把成员对应于点，而是对应于正二十面体的面，那末我们又得到了一个例子. 在这个例子里，两个成员相互认识，当且仅当他们所对应的面有公共棱. 由对偶性原则①可知，我们所作的这个例子与上面那个例子是一样的.

① 见第75页上的注. ——译者

特别地，现在容易举出一个例子，它由 12 个人组成，满足萨拉杰克博士列举的那些条件．事实上，如果在条件(2)、(3)、(4)、(5)中，以“不认识”代替“认识”，那末我们仍然得到条件(2)、(3)、(4)、(5)(只是次序不同)．因而，如果对正二十面体来说，把同一条棱上的两个顶点看作彼此不认识的人，而不在同一条棱上的顶点对应于彼此认识的人，那末正二十面体的顶点就是萨拉杰克博士所说的团体的例子．显然，此时每个成员恰好与另外六个成员熟悉．在条件(1)中，以“认识”和“不认识”分别代替“不认识”和“认识”，我们得到最后一个结论．

满足条件(2)、(3)、(4)、(5)的 10 个人的团体(其中每个人认识 5 个人，而且有熟人认识其它人)作法如下．在二十面体中，去掉相对的两个顶点以及从它们出发的棱．我们约定，剩下来的棱总连接着对应于彼此认识的人的顶点，剩下来的图形(图 98)中，相对的顶点 A_1 和 A_2，B_1 和 B_2，…，E_1 和 E_2 也对应于彼此认识的人．那末 10 个人里，每个人都有认识他们不认识的成员的熟人，这个熟人对应于与此人的顶点用同一字母(下标不同)标示的顶点．

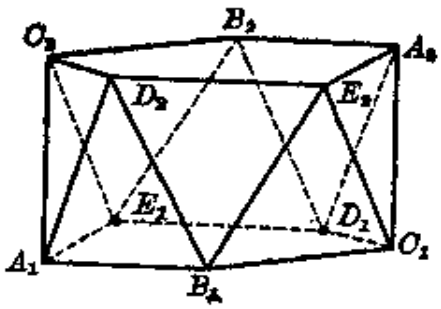


图 98

类似于上面进行的论证，可以说明条件(2)、(3)、(4)、(5)成立．

正如从第一个例子得到满足萨拉杰克博士条件的团体一样，可以从上面这个例子得到满足条件(2)到(6)的 10 人团体的例子．从图 98 还可以得到另一些例子．例如，把图 98 里对应于同一条棱连接的顶点的人，看作是认识的，或者把对应

于顶点 A_1 和 A_2, B_1 和 B_2, …, E_1 和 E_2 的人看作是互相不认识的. 这些结论的证明留给读者.

83. 我们讲两种解法: 第一种是"理论"解法, 第二种是"实际"解法.

(1) 在二进位制里, 任何一个正整数 N 可以表示为

$$N=\sum_i \alpha_i 2^{i-1}, \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

其中, 所有的系数 α_i 等于 0 或 1. 由此可见, 给定了 n 个系数 α_i, 我们能得到从 1 开始的 2^n 个自然数. 设 $n=20$, 那末, $2^{20}=1048576$. 由于在《辞海》中解释的词数小于 1048576, 所以可以把它们从 1 开始编号, 所用的数以二进位制表示时的符号不超过 20 个. 萨拉杰克博士可以这样地提出问题:

——您要我猜的词的号码用二进位制表示时, 第 i 个数码($i=1, 2, \cdots, 20$)等于 1 吗?

所得到的回答或者"是", 或者"不是", 萨拉杰克博士要不了 20 步就能确定这个号码, 从而猜中你所想的词.

(2) 《辞海》1979 年版共有上、中、下三册. 我们用两个问题确定要猜的词在哪一册. 假定它在最厚的有 1652 页的中册. 由于 $2^{10}<1652<2^{11}$, 所以接着用 11 个问题可以确定要猜的词在哪一页. 为了知道这个词在这一页的哪一栏——左还是右, 我们要一个问题. 剩下来还有六个问题用于找某一栏里要猜的词, 这已经足够了, 因为无论哪一栏中的词都不多于 $2^6=64$ 个.

84. 设 s 是至少有某种爱好的学生数(爱好音乐, 象棋或自行车运动), x 是只去听音乐会的学生数, y 是除了下棋外什么都不喜欢的学生数, z 是只喜欢自行车运动的学生数.

第一次举手的是喜欢听音乐和爱好下棋的人, 不举手的

是只喜欢自行车运动的人，所以总共有 $s-z$ 个学生举了手．在举手的人中，两者都喜欢的有 $\frac{30}{100}(s-z)$ 个．

类似地知道，第二次有 $s-x$ 个学生举了手，举两只手的有 $\frac{35}{100}(s-x)$ 个．在第三次，有 $s-y$ 个学生举了手，其中举两只手的有 $\frac{40}{100}(s-y)$ 个．

现在，设有某种爱好（棋、音乐或自行车运动）的学生中，没有一个同时有三种爱好，那末，把有一种爱好的和有两种爱好的学生数加起来，应该得到 s．但不难看出：

$$\frac{30}{100}(s-z)+\frac{35}{100}(s-x)+\frac{40}{100}(s-y)+x+y+z$$
$$=0.65x+0.6y+0.7z+1.05s>s.$$

因此，所作的假设是错误的．

这样，萨拉杰克博士完全有把握断定，在我们这个粗心的心理学者的学生中，必定有同时爱好音乐，象棋，自行车运动的多方面兴趣的人．

85．与第 93 题三个赛跑运动员一样，初看起来，情况似乎是自相矛盾的．棋手 D 在其与 E 所下的各盘中，有 64% 胜了 E，同样，E 胜 F 有 60% 的盘数，F 胜 D 有 60% 的盘数，并且，这三个人的平均实力都一样．

为了求 D 胜 E 的平均数，我们先求 E 赢 D 的平均数．为此，只需知道以 16 分比赛的 E 与以 12 分比赛的 D 下棋的概率．

由于棋手 E 在五盘中有三盘处在被评定为 16 分的竞技状态中，而 D 在五盘的三盘中是按 12 分比赛的，因此，所求的概率等于 $\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$．这样，在 $(1-9/25)100=64\%$ 的盘

数中 D 胜 E.

在以 16 分比赛的 E 与 F 之间下棋的概率等于 3/5. 因而，E 胜 F 的平均数是 $(3/5)100=60\%$.

最后，因为 F 与以 12 分比赛的 E 之间下棋的概率也是 3/5，所以 F 在 60% 的盘数中胜 D.

计算象棋俱乐部这些常客的平均实力，一点也不困难.

D 的平均力量等于 $(2\cdot17+3\cdot12):5=14$ 分，E 是 $(3\cdot16+2\cdot11):5=14$ 分，F 也是 14 分.

D 胜 E，E 胜 F，F 胜 D 的平均数不难按图 99 估计.

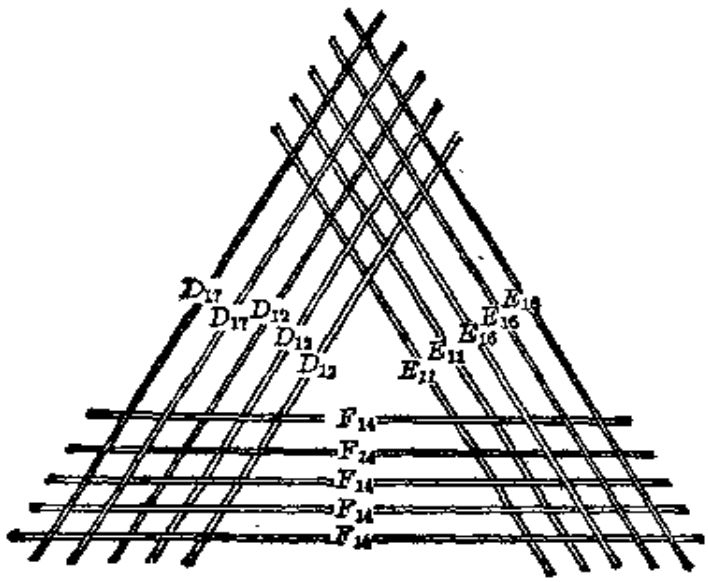


图 99

86. 从«一百个数学问题»第 94 题的注和解，本题的解的一般过程是明显的，因此我们不打算解它. 我们只指出，当顾客事先提出他需要多少布料时，用普通的尺方便；在只买零头的时候，用萨拉杰克博士的尺方便.

87. 把这只温度计上的列氏刻度和摄氏刻度的度数加起

来，再把所得的和数加上 32，萨拉杰克博士便得到了华氏刻度的温度. 事实上，设 R、C、F 分别是同一温度 t 的列氏、摄氏和华氏的度数. 从刻度的结构可知，R、C、F 的度数之间应该成立关系式

$$R=0.8C, \qquad F=1.8C+32,$$

由此，

$$F=1.8C+32=C+0.8C+32=C+R+32.$$

88. 设地球是球形的，它的大圆周长是 40000 公里(在不需要很精确的场合，常常用这个近似值). 我们证明，本题所说的那个计划是行不通的.

用反证法. 设计划是正确的，那末我们应该在地球表面上放置 5 个国际监督站，使任何两站之间的距离不小于 10000 公里. 把它们记为 A_1, A_2, …, A_5. 考察以 A_1 为极点的半球(这并非指 A_1 站应该配置在地球的几何北极或南极，而只是说，A_1 是离开所考察的半球底面最远的点). 半球上的每个点离 A_1 不超过 10000 公里，因此，监督站 A_2, A_3, A_4, A_5 分布在另一个半球上，即在以 B 点为极点的半球上(图 100). 过轴 A_1B 和每个点 A_2, A_3, A_4, A_5 作半平面. 这些半平面都是唯一地确定的，因为 A_2, A_3, A_4, A_5 都不可能与 B 点重合(如果有一个重合，其它的点就不能在以 B 为极点的半球上了). 不失一般性，可以认为，点 A_2 和 A_3 属于通过 A_1B 轴的两个"相邻的"半平面(如果不属，只要适当地变动一下各站的编号；四个点 A_2, …, A_5 中随便哪两个都不能在同一个 1/4 大圆上，即不可能确定同一个半平面). 至少有一个角 $A_i'OA_j'$ 不大于 $\pi/2$，这里的 A_i', A_j' 是"赤道"上相邻的点. 设这个角是 $A_2'OA_3'$.

现在考察以 A_2 为极点的半球(图 101). B 点在这个半

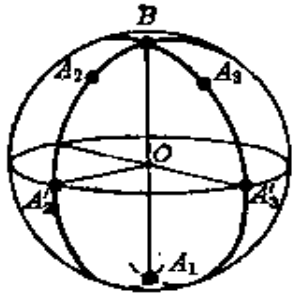


图 100

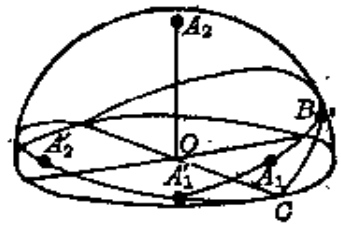


图 101

球上，因为 $\angle A_2OB<\pi/2$. 点 A_2' 也属于这个半球，因为 $\angle A_2OA_2'<\pi/2$. 此外，$\angle A_2'OO=\pi/2$. 由于 $\angle A_2'OA_3'\leqslant\pi/2-\angle A_2'OO$，点 A_3'在大圆弧 $A_2'C$ 上. 由此可得，点 A_3 在弧 BA_3' 上，也就是，在这个半球上. 这样，从 A_2 到 A_3 的距离不超过 10000 公里，与题设矛盾.

文件里所说的各站的分布是不可能的，正是这一点激起了我们这位著名外交家的愤慨.

89. 如果每一只覆盖地球 1/5 表面的碗，至多只能罩住 19 个国家(联合国成员国)的首都，那末在整个地球上联合国的会员国不多于 95 个. 这与题设中有 101 个成员国矛盾. 因而，必定存在一只碗，它覆盖地球 1/5 表面，而且至少罩住 20 个联合国成员国的首都. 如果它恰好罩住了 20 个，那末萨拉杰克博士的问题已经解决.

现在，设每个覆盖地球 1/5 表面的碗，至少罩住 20 个成员国的首都. 仿上讨论得知，并非每个这样的碗都能罩住 20 个以上的首都. 如果有某只碗恰好罩住 20 个，则本题也已解决.

这样，设存在一只碗，它覆盖地球 1/5 表面，并且罩住的首都不到 20 个. 把这只碗沿球面从罩住 20 个以上首都的位置，移动到罩住不到 20 个首都的位置，在连续地移动的"道路

上”，必有恰好罩住 20 个首都的位置.

90. 在棋局里，将军——比如说用黑棋将军——意味着，再轮到黑棋走时，将吃掉白棋的王. 在凯达拉什走马 $g5\sim f7$ 将了萨拉杰克博士的军后，所出现的局势(图 102)中，白棋不能动任何一个棋子，并且为了将死白棋，黑棋必须连续走两步，而这是违反竞赛规则的. 同时，这种局势不能算无子可动，因为它是在将军之后产生的.

有趣的是，象棋规则上关于这种局势实际上说了些什么?

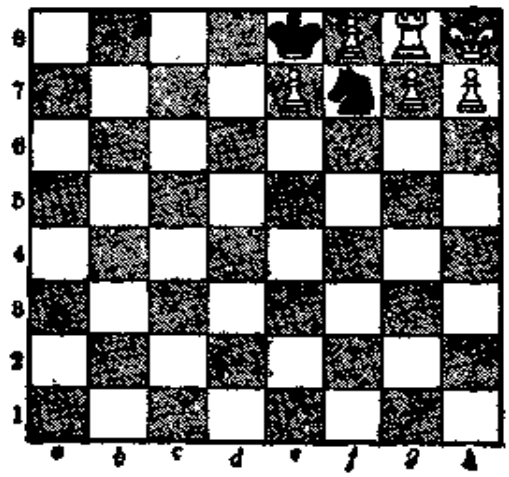


图 102

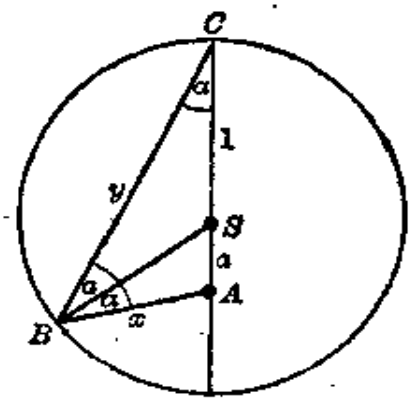


图 103

91. 为使三种轨迹的长度相等，应有 $x+y=3-a$，其中 x 表示弹子的初始位置 A 到它碰到栏板上的点 B 之间的距离，y 是 B 点到洞 C 之间的距离，a 是 A 到弹子台中心 S 的距离(图 103).

因为 BS 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 的平分线，故 $x/a=y/1$ 或 $x/a=y$. 由 $\triangle SAB$ 与 $\triangle BAC$ 相似，得

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{1+a}.$$

把 $a=x/y$ 代入方程 $x+y=3-a$ 及上式，得

$$\begin{cases} y(x+y)=3y-x, \\ x+y=xy^2. \end{cases}$$

解关于 x 的第二个方程，

$$x=\frac{y}{y^2-1},$$

把它代入第一个方程得：

$$y\left(\frac{y}{y^2-1}+y\right)=3y-\frac{y}{y^2-1},$$

由此，

$$y^3-3y^2+4=0,$$
$$(y-2)^2(y+1)=0.$$

由于 $y>0$，这个方程有唯一的（重）根 $y=2$. 因此，弦 BO 与圆的直径重合. 这样一来，弹子的三种轨迹（一条直线和两条折线）的长度都相等的初始位置不存在.

92. 设岛的半径等于 1. 作外切于圆的正方形（图 104），我们只需考察 1/8 个圆. 用下述方法把圆扇形 OAB 变换为 $\triangle OAC$.

把扇形的坐标为 (φ, r) 的点 P 与 $\triangle OAC$ 的坐标为 (x, y) 的点 P' 相对应，使

$$x=r, \qquad y=\frac{4}{\pi}\varphi r,$$

这里，

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, \qquad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

在这个变换下，扇形的弧 AB 上的所有点 $(1, \varphi)$（极坐标）被转换为直角坐标是 $x=1$, $y=(4/\pi)\varphi$ 的点，并且，当 $\varphi=0$ 时得 $x=1$, $y=0$，当 $\varphi=\pi/4$ 时，$x=1$, $y=1$. 因而，AB 弧变换为线段 AC. 如此，在上述变换下，岛的海岸线成为正方

形的边界. 此外, 对固定的 φ_0, 极坐标为 (φ_0, r) $(0\leqslant r\leqslant 1)$ 的所有点转换为直角坐标是 $x=r$, $y=(4/\pi)\varphi_0 r$ 的点, 即直线 $y=(4/\pi)\varphi_0 x (0\leqslant x\leqslant 1)$. 扇形元素 S_1, $\varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2$, $r_1\leqslant r\leqslant r_2$, 被变换为梯形 S_2, $(4/\pi)\varphi_1 x\leqslant y\leqslant(4/\pi)\varphi_2 x$ (图 106).

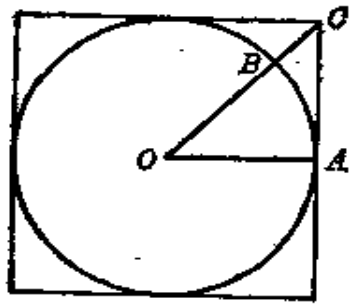


图 104

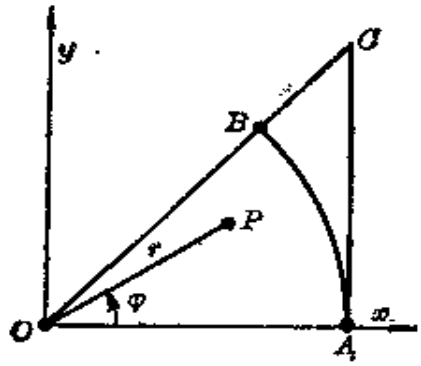


图 105

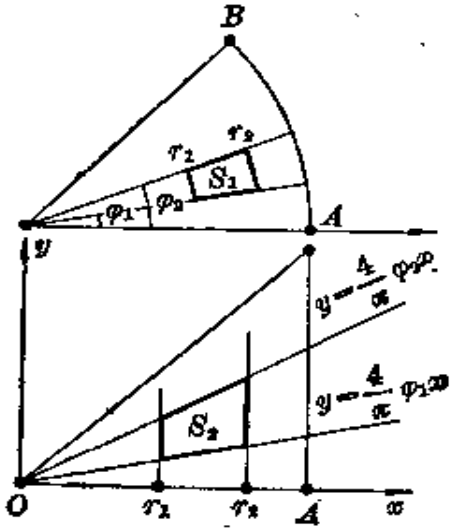


图 106

仍用 S_1、S_2 表示扇形元素和梯形的面积, 得

$$S_1=1/2(\varphi_2-\varphi_1)(r_2^2-r_1^2),$$

$$S_2=\{[(4/\pi)\varphi_2 r_2-(4/\pi)\varphi_1 r_2]+[(4/\pi)\varphi_2 r_1 -(4/\pi)\varphi_1 r_1]\}(r_2-r_1)/2.$$

经过不复杂的变形，S_2 的表达式可化为

$$S_2=\frac{2}{\pi}(\varphi_2-\varphi_1)(r_2^2-r_1^2).$$

从而，

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi}{4}.$$

这样，上述变换保持固定比例.

93. 我们考虑三次比赛. 这三次比赛中，运动员 A、B、C 以下列次序冲过终线：ABC, BCA, CAB.

在两次比赛(第一和第三次)里 A 赢了 B，在两次比赛里(第一、二次) B 胜过 C，在两次比赛(第二、三次)里 C 超过 A. 这样，只要在整个运动季节里比赛的结果如上述三次一样，本题的条件就成立了.

94. 八个选手抽签实际上可以如下进行. 把各个选手按他们随意抽出的号码排成一列. 在第一轮，第一号选手与第二号比赛，第三号与第四号比赛，第五号与第六号比赛，第七号与第八号比赛. 头两组的获胜者组成第二轮比赛的第一组，另两组的得胜者组成第二轮的第二组. 最后，在第三轮里，由第二轮的两个胜利者比赛. 根据问题条件，每个选手有完全确定的能力，因此随便哪一次比赛的结果都可预测. 能力是第二位的选手 B 只会在与能力最强的选手 A 相遇时输掉. 因而，只有他与 A 在第三轮相遇时，才会得到第二名. 为了做到这一点，需要在抽签时 A 抽出的号码不大于 4，B 的号码不小于 5 (或者反过来).

8 个选手中能力最强的两个人抽签，有 $7\cdot 8$ 种不同的结果. 第一个选手抽签时可以取 8 个号码中任何一个，抽第二个号码时，为了使选手 A 和 B 只在决赛中相遇，只能有四种抽法. 因而，在两个最强的选手抽签的 $7\cdot 8=56$ 种结果中，只有

$8\cdot4=32$ 种情形由 B 得到第二名，所求的概率等于 $32/56=4/7$.

这个问题不难推广到有 2^n 个选手的情形.

95. (1) 如果抽签用淘汰制，那末为使第二名确由选手中能力次强的选手获得，两个最强选手之一应抽第 5 号. 这个事件的概率等于下列事件的概率之和.

(a) 两个最强选手中第一个抽签的人抽第 5 号;

(b) 两个最强选手中第一个抽 1, 2, 3 或 4 号，而第二个人抽第 5 号.

第一个事件的概率等于 $1/5$，第二个事件的概率是 $4/5\cdot1/4=1/5$，因而，所求的概率等于 $2/5$.

(2) 不过，安排"空额"的最正确的方法应该是另一种，例如，这样安排：抽签后在第四、六、八位. 这时，第一轮比赛仅成为两个选手(第一和第二号)的一次比赛，在第二轮有两次比赛，第三轮有一次. 这样，每个决赛参加者得以至少与一个选手较量. 如果在抽签以后空额在秩序表的末尾，那末会出现这样的情况：最弱的选手在一、二轮轮空而一下子就进入决赛. 不难计算，抽签后空额出现在第四、六、八位时，实力是第二位的运动员得到第二名的概率等于 $3/5$. 五个选手排列在五个位子(第 1, 2, 3, 5, 7 号)有 $5!$ 种方法，下列抽签的结果可以认为是好的.

(a) 最强的选手抽了第 1, 2, 3 号，次强的抽了 5 或 7 号;

(b) 最强的在第 5 或 7 号，次强的在 1, 2 或 3 号.

在这两种情况里，其余的选手可以抽这两个人抽剩的任何号码. 因而，好的抽签结果的总数等于 $3\cdot2\cdot3!+2\cdot3\cdot3!$，所求的概率等于

$$\frac{3\cdot 2\cdot 3!+2\cdot 3\cdot 3!}{5!}=\frac{3}{5}.$$

(3) 假使空额与选手一样地参加抽签，则所求的概率与第94题一样，即4/7.

(4) 我们再考虑一种抽签方法. 先抽一次签确定第一轮比赛的各对选手(抽签规定五个选手的次序，并添写三个空额；在第一轮里1与2，3与4比赛，5号轮空)，然后，仍通过抽签在第一轮的获胜者中确定第二轮比赛的各对. 能力次强的运动员B进入第二轮的概率，正是他在第一轮不与最强选手A比赛的概率. 这发生在下列情形：

(a) A抽1或2号，B抽3，4或5号；

(b) A抽3或4号，B抽1，2或5号；

(c) A抽5号，B抽1，2，3或4号.

1～5号选手的全排列等于5!，而对应于(a)、(b)、(c)的抽签的好结果，分别有$2\cdot 3\cdot 3!$、$2\cdot 3\cdot 3!$和$1\cdot 4\cdot 3!$种(在这三种情形里，其它选手的分布都是随意的). 因而，B是第一轮比赛优胜者之一的概率是

$$\frac{2\cdot 3\cdot 3!+2\cdot 3\cdot 3!+1\cdot 4\cdot 3!}{5!}=\frac{4}{5}.$$

如果B在第一轮获胜，则在第二轮里有两个最强的选手A、B，一个较弱的选手以及一个空额. 随着抽签的不同结果，B或者与较弱的选手比赛，或者与A相遇，或者轮空. 这三种情形里，有两种B能进入决赛而得到第二名. 因而，如果B已在第一轮获胜，那末他在第二轮获胜的概率是2/3. 这样，B成为第二名的概率是$\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$. 这是本题的又一种解答.

96. 解法1. 设n是选手数. 由条件知道，比赛场次也是n，每一场有四个选手参加，因此比赛人次共$4n$. 由于选手数

是 n，而且他们每个人参加的比赛场数一样多，所以每个选手参加 $4n/n=4$ 场比赛. 在这四场比赛里，他每次与三个不同的对手较量，因而所有的选手共 13 个，比赛也是 13 次.

这样，煤渣跑道竞赛爱好者从熟人那里得到的信息是完全的，因为这些信息使他能确定选手数和竞赛场次都是 13，但是，这些信息对确定各场竞赛的选手组成是不够的.

事实上，从 1 到 13 把选手编号，那末 13 个选手参加 13 场竞赛的两种不同的秩序表如下(各种可能的秩序表的总数要大得多)：

场　次	选　　手	选　　手
I	1, 2, 3, 4	1, 2, 5, 8
II	1, 5, 6, 7	1, 3, 6, 9
III	1, 8, 9, 10	1, 4, 7, 10
IV	1, 11, 12, 13	1, 11, 12, 13
V	2, 5, 10, 12	2, 3, 10, 12
VI	2, 6, 8, 13	2, 6, 4, 13
VII	2, 7, 9, 11	2, 9, 7, 11
VIII	3, 5, 9, 13	5, 3, 7, 13
IX	3, 6, 10, 11	5, 6, 10, 11
X	3, 7, 8, 12	5, 9, 4, 12
XI	4, 5, 8, 11	8, 3, 4, 11
XII	4, 6, 9, 12	8, 6, 7, 12
XIII	4, 7, 10, 13	8, 9, 10, 13

解法 2. 设 n 是选手数. 若每个选手与其它人只在一场比赛中相遇，且在每场比赛中只有两个选手出发，那末竞赛应进行

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

场. 但实际比赛中每场有 4 个选手出发，可组成六对不同的

选手，因为

$$C_4^2=\frac{4\cdot3}{1\cdot2}=6,$$

所以实际竞赛场次是两人一对出发场次的 1/6，即

$$\frac{n(n-1)}{12}.$$

由题设条件，竞赛场次是 n，因此

$$\frac{n(n-1)}{12}=n.$$

解之，得 $n_1=0$，$n_2=13$. 满足问题条件的唯一的解是 $n=13$.

这个问题可以推广到每次比赛有 k 个选手的情形. 仿上讨论，若每场竞赛只有两个选手，且每个选手与自己的对手只比赛一场，那末竞赛应进行

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

场. 但实际比赛中每场有 k 个选手，或

$$C_k^2=\frac{k(k-1}{1\cdot2}$$

对不同的选手，因此比赛总场次要减小 $\frac{k(k-1)}{1\cdot2}$ 倍，即进行

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}$$

场. 从方程

$$\frac{n(n-1}{k(k-1)}=n,$$

得 $n=0$ 或 $n=k(k-1)+1$.

为了确定有多少个选手参加竞赛，以及进行了多少次竞赛，知道选手数与比赛场数一样多，以及每场比赛有 k 个选手就够了.

97. 本题并不如初看起来那么简单. 在《数学》杂志上刊登过下列解答.

"如果随便怎么选择初始位置,国王都不能从棋盘的左边走到右边,那末在第 i 条横排上,每一个布了地雷、但不与其它布了地雷的格子邻接的格子,应该与第 $i-1$ 和 $i+1$ 条横排的布了地雷的格子有公共边. 因此,我们总能指出埋有地雷的格子,它们象骨牌一样地分布,形成棋盘上、下横排之间的'桥梁'(见图107,在这个图上只画了某些埋有地雷的格子. 除此之外,在盘上还可以有其它埋有地雷的格子). 为了使车沿埋有地雷的格子从棋盘的上边走到下边,象图 107 这样的分布是充分必要的,所以,本题的正反两个结论都已被证明."

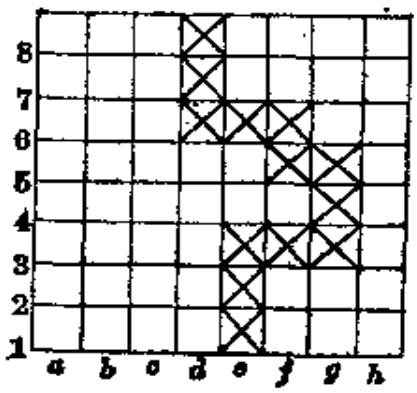


图 107

问题的提出者史坦因豪斯教授否定了这个解答.

"这个解答",史坦因豪斯致《数学》杂志编辑部的信说,"实质上不是别的,而正是同义重复,以明显的方式直观地重复了问题的条件和结论. 所作的论证只不过使我们确信问题的结论的正确性,而远不是严格的证明. 特别是,在发表的解答中引用了下述'引理': '如果随便怎么选择初始位置,国王都不能从棋盘的左边走到右边,那末在第 i 条横排上,每一个布了地雷、但它不与其它布了地雷的格子邻接的格子,应该与第 $i-1$ 和 $i+1$ 条横排的布了地雷的格子有公共边'. 但若在图 107 里,我们还在 $b5$ 埋了地雷,那末'引理'就错了. 事实上,问题就在于可以证明,即使我们在一些孤立的格子埋了

地雷，国王也不可能从棋盘的左边走到右边. 在设法证明了这个结论以后，我们还要证明，阻碍国王的这组格子，形成棋盘上、下边之间的‘桥梁’.

编辑部对刊登的解答评定为 3 分. 我似乎觉得，这显然定得太高，不过，对这个问题的完整的解答完全可以定为 20 分”.

完全承认问题提出者的正确性，《数学》杂志编辑部把本题的完整的解答定为 20 分，但……解答并没有随之而出现. 也许本书的读者自己会提出能评到 20 分的解答.

93. 我们要写出，车在棋盘上的一种满足条件 1～4 的放法.

为简单起见，引进下列术语. 我们约定：若在某条直行上没有放车，并且至少有一个白格不受棋盘上任何一个车的攻击，则称这条直行是自由的. 若在某条直行上放有一个车，它沿横排不受棋盘上任何一个车的攻击，则称这样的直行为被占用的. 没有车的横排叫自由的.

在空棋盘上，自由直行数等于自由横排数. 我们在每条直行上面写下此行的白格数，并且按这些数从小到大的次序，在相应的直行上放车. 当两个数相等时随便在哪条上先放. 这样做了以后，如果我们能把车放在所有直行上，那末条件 1～4 似乎是可以成立的. 例如，象图 108 那样配置. 白格上的圆圈表示车，圆圈里的数字表示放车的次序. 显然，对于图 108 上的棋盘来说，解法不是唯一的.

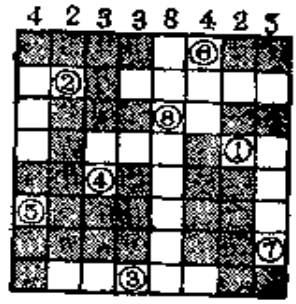
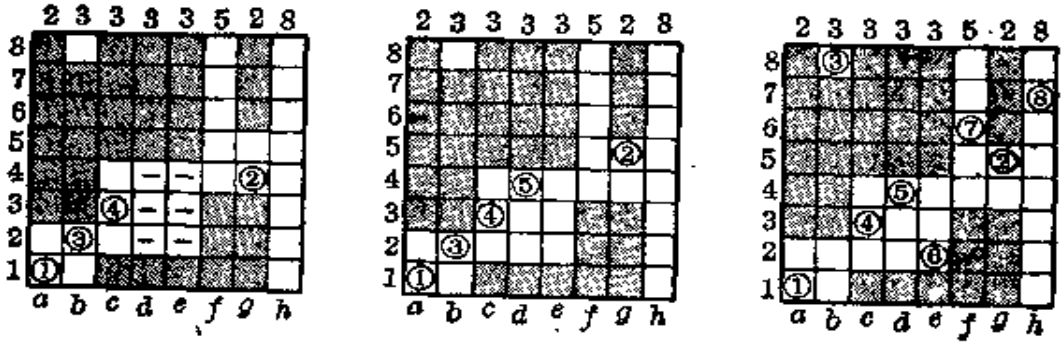


图 108

但是，对于某些棋盘来说，用刚才所说的方法会产生困难.

(1) 放了一个或几个车后，我们会发现，还没有放车的某条(或一下子几条)直行的所有白格，沿横排处于已经放了的车的攻击之下．在这样的直行上，放上新的车将违反条件3.

为解决这个问题，我们尝试把一个已经放好的车，移动到同一直行的另一白格上．如果这种办法成功了，我们就可以毫无困难地再在盘上放一个车．例如，在图 109(1) 上就出现了上面所说的困难，放了四个车后，直行 d、e 上所有的白格都处在沿横排的攻击之下．因此，我们找一条已经放了车，但还有白格不在其它车沿横排攻击之下的直行，例如 g．把车 2 移到 $g5$ (图 109(2))，我们能在直行 d 上，把第五个车放在 $d4$．然后把车 3 移到 $b8$，就能在直行 e 上放第 6 个车．放最后两个车不会有多大困难．最终的局势见图 109(3)．



(1)　(2)　(3)

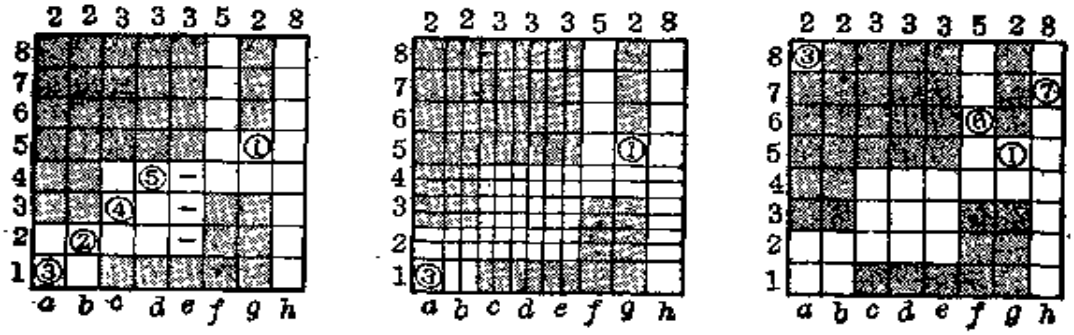
图 109

这样，如果我们遇到，只要沿直行移动已经放好的车就能解决的困难，那末车总能不违反条件 1～4 地分布着．

(2) 但还会产生另一类困难．在一条(或几条)直行上，每个白格都沿横排被攻击，而在已被占用的直行上也没有自由的白格．所有白格沿横排处在其它车攻击之下的直行，叫做被封锁的，相应的局势叫第一类封锁．在被封锁的直行上

放置车的话，总要违反条件 3. 同时，我们又不能沿直行移动已经放好的车，因为相应的直行没有自由白格.

这种困难，可以用下面的例子说明的方法解决. 图 110(1) 出现了这样的情形：直行 e 被封锁，它的所有白格沿横排处在车 2、4、5 的攻击之下，而在被车 2、4、5 占用的直行上没有自由的白格. 我们从棋盘上把封锁直行 e 的白格上的车拿掉，而且下面我们不再把车放在被封锁的直行，以及拿掉车的直行和横排上（在这个例子里是直行 b、c、d、e 及横排 2、3、4；在图 110(2) 上它们已被划去）. 我们指出，被封锁的横排数总小于被封锁的直行数，而且，被封锁的直行和自由横排相交处的格子是黑的. 所以，不必担心继续放车时，在被封锁的直行上，会出现沿横排被新放上的车攻击的白格.



(1) (2) (3)

图 110

也可能出现这样的情形：在被封锁的直行上有一些白格，它们沿横排不是受我们拿去了的那些车的攻击，而是受另一些原来放在棋盘上的车的攻击. 根据条件 4，这些格子应该沿直行受某个车的威胁，但在划去的直行上我们不能放新的车. 这种情形叫第二类封锁. 在我们考虑的例子里（图 110），车 3 沿横排攻击 $b1$. 有两种方法排除第二类封锁. 首先要看

一看，放着封锁的车的直行和没有去掉的、自由的横排相交的地方有没有白格．如果有，就试一试，把封锁的车移到其中之一上去，然后继续把车放到盘上．如果没有自由的白格，那末就把封锁的车所在的直行和横排划去．换句话说，我们从盘上不仅拿去引起第一类封锁的车，而且拿去引起第二类封锁的车．在这个例子里(图 110)，第二类封锁可以通过把车 3 移到 $a8$ 而排除．如果 $a8$ 是黑的，我们应该把直行 a 和横排 1 划去．无论在哪种情形，放其它的车都不会产生什么困难．

排除了第二类封锁，并且划去了相应的横排和直行后，我们继续放车．如果继续放时仍发生第一、二类封锁，则仍如上面所举的例子一样地排除掉．

现在证明，上面所说的把车放到棋盘上去的方法，总能使我们至少找到一种满足本题条件的布局．

首先指出，如果我们总可以把车放在白格数不超过其它自由直行的自由直行上，那末最后一个车将放在只有白格的直行上．在这样的直行上，车总可以放上去，与是否遇到上面说的两类封锁无关．

如果在安排前面的车时，不产生第一和第二类封锁，那末在棋盘上放最后一个车时，应当已经放了 $n-1$ 个车，而且每个车放在一条横排和一条直行上．因而，只有一条横排和一条直行仍然是自由的．由于有一条自由直行仅以白格填满，所以无论什么都不会妨害我们，把最后一个车放在这条直行与自由横排相交的自由白格上．结果，棋盘上放了 n 个车，每条横排和每条直行各有一个．显然，这样的车不互相攻击．此外，没有被车占用的格子，既处在沿横排的攻击之下，又处在沿直行的攻击之下．这样一来，车的这种分布满足本题条件．

现在假定，配置车后，产生了第一或第二类封锁．划去相

应的横排和直行，以及由棋盘上留下的“碎块”构成新的棋盘之后，我们得到一个横排比直行长的矩形．这样，把最后一个车，放在只由白格组成的直行上，不会封锁任何一条直行，因为每条直行上已经放了车，每一个没有去掉又没有被占用的格子，处在沿直行的攻击之下．

仅由白格组成的直行不可能被封锁，因为在棋盘上，最多可配置沿横排威胁这条直行的 $n-1$ 个白格的 $n-1$ 个车．因而，我们总能把最后一个车，放在这条直行的沿横排不受任何一个车攻击的白格上．

注意：把上述解法应用于直行数小于横排数的棋盘，也满足本题的条件．

99．如果把转动棋盘及关于纵、横对称轴反射而出现的不同局势，看作一种的话，那末按本题条件，把 4 个棋放在十六格棋盘上，只能有唯一的一种方法．转动和反射总共可得四个棋子的八种不同的摆法，其中四种见图 111．

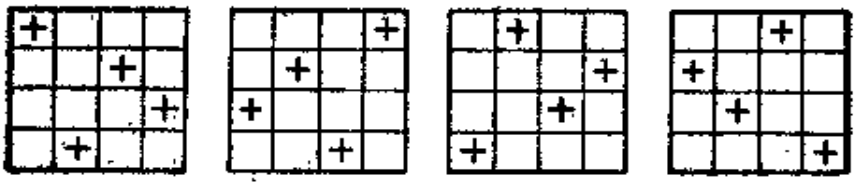


图 111

把图111所示的四种摆法如图112那样分布，我们得到16个棋子，在空间棋盘小方块里的摆法是，在任何一层里，在每条直行和横排上恰好放了一个棋子(主对角线上不是这样)．

可以证明：把 16 个棋子放在 $4\times4\times4$ 的三维棋盘的小方块里，使各层的任何一条直行、横排以及主对角线上，都恰好有一个棋子的问题是无解的．

100．首先，我们把注意力集中在三维棋盘上，不可能放

置65个车而没有一个不受其它车的攻击. 事实上,如果能这样地放置,那末在水平的某一层内应该至少有九个车. 但水平层可以看作普通的8×8的棋盘.在这样的棋盘上，不可能放9个车而使其中任何两个都不互相攻击. 至少在一条横排或一条直行上一定会出现两个车,因而它们是互相攻击的.

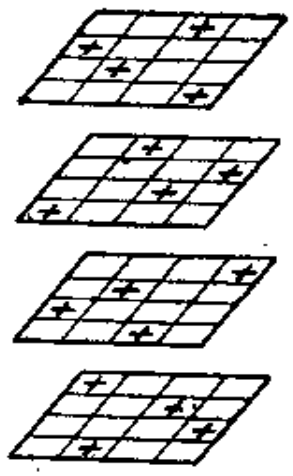


图 112

本题的解归结为使八层水平层上,每一层都放8个互不攻击的车，并且每一纵列(从上到下的小方块)上也恰好只有一个车.

我们把放在第 i ($i=1, 2, \cdots, 8$) 水平层上的车，叫做第 i 族车，那末上述问题可以这样地提出：用8族车（每族有8个)填满普通的棋盘,使每个车都不在同一族车的攻击之下.

同样地,本题的解等价于把八个数1, 2, 8, …, 8排列成8×8的正方形表，使这些数在每一行每一列里出现且仅出现一次. 例如:

1 2 3 4 5 6 7 8	5 6 7 8 4 3 2 1
2 3 4 5 6 7 8 1	6 5 8 7 8 4 1 2
3 4 5 6 7 8 1 2	7 8 5 6 2 1 4 3
4 5 6 7 8 1 2 3	8 7 6 5 1 2 3 4
5 6 7 8 1 2 3 4	4 3 2 1 5 6 7 8
6 7 8 1 2 3 4 5	3 4 1 2 6 5 8 7
7 8 1 2 3 4 5 6	2 1 4 3 7 8 5 6
8 1 2 3 4 5 6 7	1 2 3 4 8 7 6 5

显然,这样的表可以构造很多个,例如，把上面表里的行或列重排.

250162